Sisältö

4 Derivaatan sovellutuksia

Lause 4.1 Oletetaan, että funktiolla f on derivaatta pisteessä $a \in \mathbf{R}$.

a) Jos $f'(a) > 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että

   (1) $f(x) < f(a)$ kun $a - r < x < a$ ja

   (2) $f(x) > f(a)$ kun $a < x < a + r$.

b) Jos $f'(a) < 0$, on olemassa $r > 0$ siten, että

   (1) $f(x) > f(a)$ kun $a - r < x < a$ ja

   (2) $f(x) < f(a)$ kun $a < x < a + r$.

Todistus. Todistetaan kohta a). Koska

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{y \to a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \tag{1}$$

on suurempi kuin 0, on olemassa r siten, että

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} > 0,$$

kun $0 < |y - a| < r$. Tästä seuraa

(1), jos $a - r < y < a$

(2), jos $a < y < a + r$.

$\square$

Lause 4.2 Oletetaan, että funktio f on määritelty välillä Δ, ja f saa suurimman (tai pienimmän) arvonsa pisteessä a. Oletetaan edelleen, että on olemassa $f'(a)$. Silloin

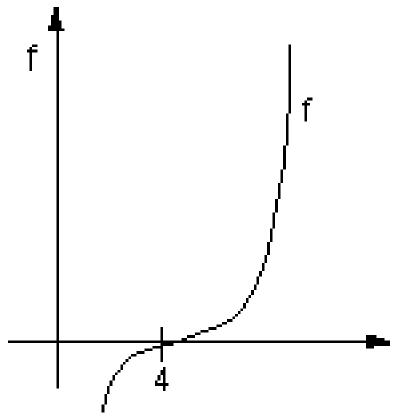
$$f'(a) = 0. \tag{2}$$

Siis (2) on välttämätön ehto sille, että pisteessä a on f:n suurin arvo, mutta ehto ei ole riittävä. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-4)^3 \\ f'(x) &= 3(x-4)^2 \\ f'(4) &= 0 \end{aligned}$$

mutta f ei saa suurinta arvoaan (edes lokaalista) pisteessä 4 (katso kuva 4). (Funktion suurin ja pienin arvo on määritelty määritelmässä 4.9 (sivu 7).)

Lause 4.3 (Rollen lause) Oletetaan, että



1. funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$
2. f on derivoituva välillä $]a, b[$
3. $f(a) = f(b) = 0$.

Silloin on olemassa $t \in]a, b[$, jossa $f'(t) = 0$.

Esimerkki Sovellutuksena Rollen lauseelle todistetaan seuraava tulos. Jos $p > 0$, niin yhtälöllä

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad (p, q, r \in \mathbf{R})$$

on enintään 2 reaalista ratkaisua.

Todistus. Funktio

$$f'(x) = 4x^3 + 2px + q$$

on aidosti kasvava, koska se on summa kahdesta aidosti kasvavasta funktiosta ja vakiosta. Tästä seuraa, että on olemassa enintään 1 piste $b \in \mathbf{R}$ siten, että $f'(b) = 0$. Oletetaan, että funktiolla f on 3 nollakohtaa x_1, x_2, x_3, missä $x_1 < x_2 < x_3$. Rollen lauseesta (sivu 2) seuraa, että on olemassa $y_1 \in]x_1, x_2[$ ja $y_2 \in]x_2, x_3[$ siten, että $f'(y_j) = 0$, missä $j = 1, 2$. Ristiriita! $\square$

Lause 4.4 (Väliarvolause) Oletetaan, että

1. funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja
2. f on derivoituva välillä $]a, b[$.

Silloin on olemassa piste $t \in \,]a, b[$ siten, että

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

eli

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

Todistus. Määritellään

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Funktio F toteuttaa Rollen lauseen (sivu 2) ehdot, koska

$$\begin{aligned} F(b) &= f(b) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) \\ &= f(b) - f(a) - \big(f(b) - f(a)\big) = 0, \end{aligned}$$

samoin $F(a) = 0$. Rollen lauseesta seuraa, että on olemassa $t \in \mathbf{R}$ siten, että $F'(t) = 0$. Näin ollen

$$0 = F'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Lause 4.5 (Integraalilaskennan peruslause) Oletetaan, että

1. funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$,
2. f on derivoituva välillä $]a, b[$ ja
3. $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in \,]a, b[$.

Silloin f on vakio välillä $[a, b]$.

Todistus. Olkoon $x \in \,]a, b]$. Sovelletaan väliarvolausetta (sivu 3) välillä $[a, x]$:

$$f(x) - f(a) = f'(t)(x - a),$$

missä $t \in \,]a, x[$. Saadaan

$$f'(t) = 0 \Rightarrow f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a).$$

□

Lause 4.6 Oletetaan, että funktio f

1. on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $f(a)=A$,
2. on derivoituva välillä $]a,b[$ ja
3. $f'(x) \leq M$ kaikille $x \in\,]a,b[$.

Tällöin

$$f(b) \leq A + M(b-a).$$

Yhtäsuuruus pätee vain funktiolle

$$g(x) := A + M(x-a).$$

Todistus. Olkoon $x \in\,]a,b]$. Väliarvolauseesta (sivu 3) seuraa, että on olemassa t siten, että

$$f(x) - f(a) = f'(t)(x-a).$$

Kohdasta 3. seuraa, että

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) \leq M(x-a) \\ \iff\quad & f(x) \leq f(a) + M(x-a) = A + M(x-a). \end{aligned} \tag{3}$$

Sijoitetaan tähän $x=b$, saadaan haluttu epäyhtälö.

Oletetaan, että $f(x)$ ei ole sama kuin $g(x)$. Halutaan näyttää, että

$$f(b) < A + M(b-a).$$

Kaavan (3) nojalla aina pätee

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in\,]a,b]\,.$$

Koska $f \neq g$ niin on olemassa

$$x_0 \in\,]a,b]\,,\ \text{jolle}\ f(x_0) < g(x_0).$$

Käytetään jo todistettua lauseen alkuosaa välillä $[x_0,b]$:

$$\begin{aligned} f(b) \leq f(x_0) + M(b-x_0) < g(x_0) + M(b-x_0) &= A + M(x_0-a) + M(b-x_0) \\ &= A + M(b-a). \end{aligned}$$

äin ollen

$$f(b) < A + M(b-a).$$

□

Samantapaisella tarkastelulla saadaan väliarvolauseesta myös seuraava tulos.

Lause 4.7 Oletetaan, että funktio f

1. on derivoituva pisteen a ympäristössä $B(a,h)$, missä $h > 0$, ja
2. $|f'(x)| \leq M \quad \forall\, x \in B(a,h)$.

Silloin
$$|f(x) - f(a)| \leq M|x-a|$$
kaikille $x \in B(a,h)$.

Esimerkki Mittauksessa on kulman φ suuruudeksi saatu $44.1°$ ja tiedetään, että mittausvirhe on enintään $0.1°$. Kuinka suuren virheen tämä voi enintään aiheuttaa, kun lasketaan funktion $\tan\varphi$ arvo?

Ratkaisu. Merkitään

φ =kulman tarkka arvo

$\widetilde{\varphi}$ =kulman likiarvo $(= 44.1°)$.

Todetaan $\varphi \in [44.0°, 44.2°]$. Sovelletaan lausetta 4.7 (sivu 5), kun
$$f(x) = \tan x.$$
Pätee
$$D\tan x = 1 + \tan^2 x$$
ja tan on kasvava välillä $[0°, 45°]$, joten
$$D\tan x = 1 + \tan^2 x \leq 1 + \tan(\frac{\pi}{4}) = 2.$$
Mutta toisaalta
$$1 + \tan^2 x > 0,$$
joten
$$|D\tan x| \leq 2,$$
kun $x \in [44.0°, 44.2°]$. Valitaan lauseessa 4.7 (sivu 5) $a = \widetilde{\varphi}$, jolloin
$$\varphi \in B(\widetilde{\varphi}, 0.1°) = \,]44.0°, 44.2°[\,,$$
ja tästä seuraa
$$|\tan\varphi - \tan\widetilde{\varphi}| \leq 2 \cdot 0.1° \cdot \frac{\pi}{180°} < 4 \cdot 10^{-3}.$$
Vastaus: Virhe on enintään $4 \cdot 10^{-3}$.

Lause 4.8 Ilman todistusta mainitsemme myös seuraavan: Oletetaan, että funktio f

1. on jatkuva (rajoitetulla tai rajoittamattomalla) välillä Δ ja
2. f' on olemassa ja on ≥ 0 kaikissa Δ:n sisäpisteissä.

Silloin f on kasvava välillä Δ. Lisäksi, jos yhtälö $f'(x) = 0$ ei ole voimassa millään Δ:n osavälillä, niin f on aidosti kasvava välillä Δ.

Vastaava tulos pätee tietenkin myös väheneville funktioille olettaen, että derivaatta on negatiivinen.

Esimerkki 1 Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$ välillä $\Delta = \mathbf{R}$. Tämä on aidosti kasvava koko $\mathbf{R}$:ssä. Funktion derivaatalla $f'(x) = 3x^2$ on yksi nollakohta, piste 0. Derivaatta ei kuitenkaan ole 0 millään $\mathbf{R}$:n osavälillä

$$f'(x) > 0, \text{ kun } x \in \left]-\infty, 0\right[, \left]0, \infty\right[.$$

Esimerkki 2 Olkoon

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Näytä, että f on pienenevä.

Ratkaisu.

$$f'(x) = \frac{(1 - \cos x)\cos x - (1 + \sin x)\sin x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{\overbrace{(\cos x - 1)}^{<0} - \overbrace{\sin x}^{>0}}{(1 - \cos x)^2} < 0$$

kaikilla tarkasteluvälin pisteillä.

4.1 Funktion ääriarvot

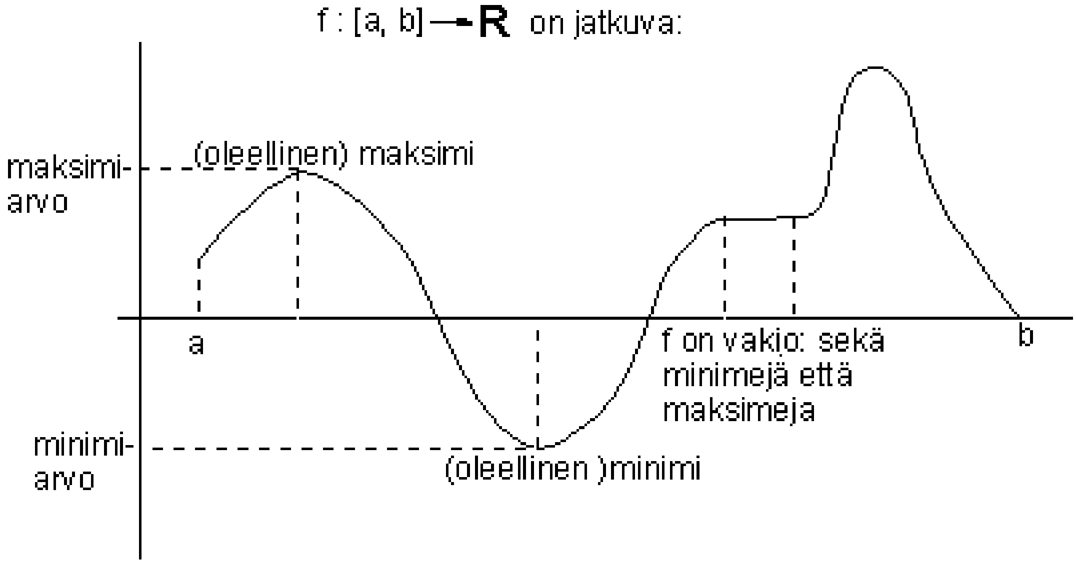
Määritelmä 4.9 Olkoon funktio f määritelty välillä Δ. Jos on olemassa $x_1 \in \Delta$ siten, että $f(x) \leq f(x_1)$ kaikilla $x \in \Delta$, niin $f(x_1)$ on f:n suurin arvo välillä Δ.

Vastaavasti $f(x_1)$ on f:n pienin arvo jos $f(x) \geq f(x_1)$ kaikilla $x \in \Delta$.

Esimerkki 1 Funktion $f(x) = x^3$ suurin arvo välillä $\Delta = [0, 1]$ on $f(1) = 1$.

Esimerkki 2 Funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole suurinta arvoa välillä $\Delta = [5, \infty[$. (Mikään x_1 ei toteuta esitettyä vaatimusta: Jos otamme jonkun pisteen x_1, aina löytyy pisteitä x jossa $f(x) > f(x_1)$.)

Esimerkki 3 Funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole suurinta arvoa myöskään välillä $\Delta = [0, 1[$. Jos $x_1 \in [0, 1[$, niin on olemassa lukuja x siten, että $x_1 < x < 1$ ja näille pätee $f(x) > f(x_1)$.



Määritelmä 4.10 Funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali maksimikohta (tai lokaali minimikohta) jos $f(x_0)$ on f:n suurin (tai pienin) arvo jossakin x_0:n ympäristössä $B(x,r)$. Vastaava f:n arvo $f(x_0)$ on maksimiarvo (tai minimiarvo).

Yhteisnimitys: (Lokaali) ääriarvokohta, (lokaali) ääriarvo.

Maksimi (tai minimi) on oleellinen, jos $f(x_0) > f(x)$ (tai $f(x_0) < f(x)$) kun

$$x \in B'(x_0,r) = B(x_0,r) \setminus \{x_0\}.$$

Katso kuva (4.1).

Lause 4.11 Oletetaan, että funktio f on jatkuva pisteen a ympäristössä $B(a,h)$, $h > 0$ ja f on derivoituva ympäristössä $B'(a,h)$.

1. Jos $f'(x) > 0$, kun $a-h < x < a$ ja $f'(x) < 0$, kun $a < x < a+h$, niin f:llä on pisteessä a oleellinen maksimi.

2. Jos $f'(x) < 0$, kun $a-h < x < a$ ja $f'(x) > 0$, kun $a < x < a+h$, niin f:llä on pisteessä a oleellinen minimi.

Todistus. Todistetaan kohta 1. Lauseesta 4.8 (sivu 6) seuraa, että kun $a-h < x < a$ pätee $f(x) < f(a)$ ja sama pätee myös kun $a < x < a+h$. $\square$

Huomautus Aikaisemmin on osoitettu, että jos f on derivoituva pisteessä x_0 ja f:llä on ääriarvo pisteessä x_0, niin $f'(x_0) = 0$.

Esimerkki Määrää funktion

$$f(x) = x(|x| + |x-1|)$$

ääriarvot.

Ratkaisu. Kirjoitetaan

$$f(x) = \begin{cases} x(-x+1-x) \\ x(x+1-x) \\ x(x+x-1) \end{cases} = \begin{cases} x(1-2x), & \text{kun } x \leq 0 \\ x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ x(2x-1), & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Nyt

$$f'(x) = \begin{cases} 1-4x, & \text{kun } x < 0 \\ 1, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 4x-1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Sellaista x ei ole, että $f'(x) = 0$. Muut mahdolliset ääriarvopisteet ovat ne pisteet, joissa f ei ole derivoituva: $x = 0$ ja $x = 1$.

Piste $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1-4x > 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 > 0, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

ei ole ääriarvokohta.

Piste $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 > 0, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 4x-1 > 0, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

ei ole ääriarvokohta.

Esimerkki Määrää funktion

$$f(x) = x^2(x-1)^3$$

lokaalit ääriarvot.

Ratkaisu. Funktio f on derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä. Siis kaikissa ääriarvokohdissa $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \cdot 3(x-1)^2 + 2x(x-1)^3 = (x-1)^2\big(3x^2 + 2x(x-1)\big) \\ &= x(3x+2x-2)(x-1)^2 = 5x(x-\tfrac{2}{5})(x-1)^2. \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = 0$ kun $x = 0, \frac{2}{5}$ tai 1.

	<0	0 … $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ … 1	>1
$f'(x)$	+	- -	+ +	+ +
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Kuviosta huomataan, että $x = 0$ on funktion maksimi ja $x = \frac{2}{3}$ minimi.

Lause 4.12 Jos jatkuvalla funktiolla f on välillä Δ suurin (tai pienin) arvo, f saavuttaa sen lokaalissa maksimi (tai minimi) kohdassa tai välin päätepisteessä (jos sellainen on).

Tarkasteluilla, jotka siirretään myöhempään ajankohtaan, voidaan osoittaa seuraava tärkeä tulos:

Jos Δ on suljettu ja rajoitettu väli, niin jatkuvalla funktiolla on suurin ja pienin arvo välillä Δ.

Esimerkki Määrää funktion

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 2]$.

Ratkaisu. Tutkitaan funktion 0-kohdat ja välin päätepisteet.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0, \quad \text{kun } x = \pm 1.$$

$$f(-2) = -8 + 6 - 1 = -3$$

$$f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$$

$$f(1) = 1 - 3 - 1 = -3$$

$$f(2) = 8 - 6 - 1 = 1$$

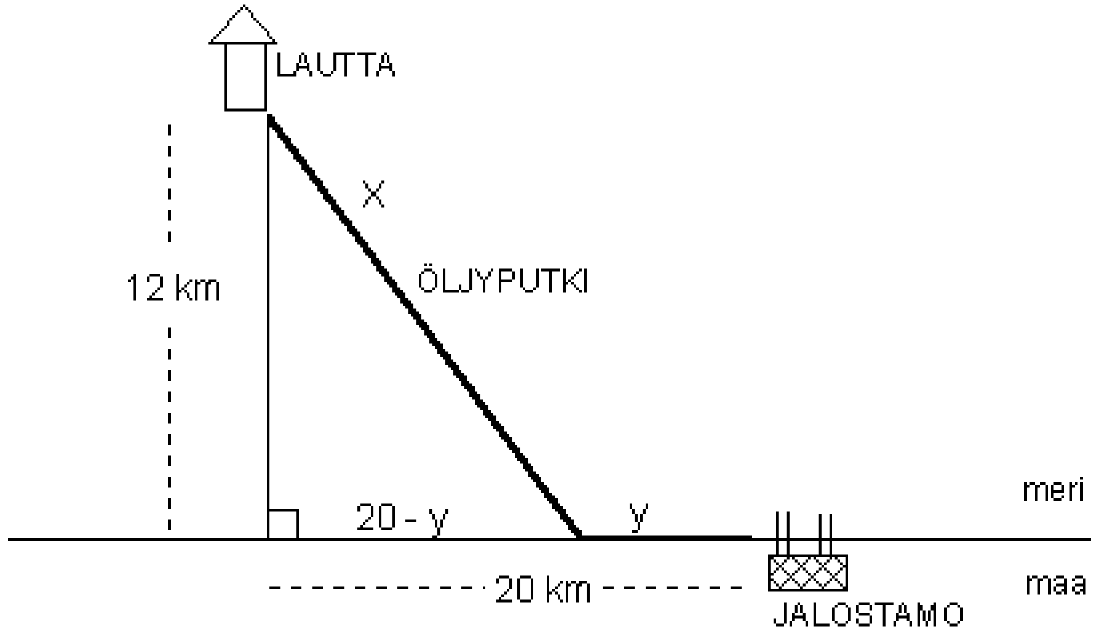
Suurin arvo on 1 ja pienin arvo on -3.

Esimerkki

Tarkastellaan erilaisien öljyputken rakentamistapojen kustannuksia, kun öljyputken rakentaminen merellä maksaa 50 000 euroa/km ja maalla 30 00 euroa/km. Katso kuva (4.1).

Esimerkiksi jos putki rakennetaan tulemaan kohtisuoraan maihin, mereen rakennettavan putken osuuden kustannuksiksi tulee $12 \cdot 50000$ euroa ja maalle rakennettavan osuuden $20 \cdot 30000$ euroa.

merellä	$12 \cdot 50000$	
maalla	$20 \cdot 30000$	
yht.	1200000	euroa



Yhteensä koko putki maksaisi siis 1 200 000 euroa.

Jos taas putki rakennettaisiin suoraan lautalta jalostamolle, maksaisi se 1 166 00 euroa. Tällöin koko putki kulkee merellä ja sen pituus saadaan Pythagoraan lauseesta.

Vedetään putki lautalta pisteeseen y (putken rantautumispisteen etäisyys jalostamosta):

Öljyputken pituus merellä, x, saadaan nyt Pythagoraan lauseen avulla

$$x^2 = 12^2 + (20-y)^2 \Rightarrow x = \sqrt{144 + (20-y)^2}.$$

Haetaan y:tä jolla putken rakentamiskustannus on pienin mahdollinen. Rakentamiskustannus y:n funktiona on

$$f(y) = 50000x + 30000y = 50000\sqrt{144 + (20-y)^2} + 30000y.$$

Halutaan siis tietää tämän funktion pienin arvo, kun $y \in [0, 20] := \Delta$. Funktio $f(y)$ on jatkuva välillä Δ ja derivoituva välin sisäpisteissä. Funktion derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(y) &= 50000 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2(20-y)(-1)}{\sqrt{144+(20-y)^2}} + 30000 \\ &= -50000\tfrac{20-y}{\sqrt{144+(20-y)^2}} + 30000. \end{aligned}$$

Ja derivaatan nollakohdat

$$\begin{array}{rrcl} & f'(y) & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & 50000(20-y) & = & 30000\sqrt{144+(20-y)^2} \\ \Longleftrightarrow & \frac{5}{3}(20-y) & = & \sqrt{144+(20-y)^2} \\ \Longleftrightarrow & \frac{25}{9}(20-y)^2 & = & 144+(20-y)^2 \\ \Longleftrightarrow & \frac{16}{9}(20-y)^2 & = & 144 \\ \Longleftrightarrow & 20-y & = & \pm\frac{3}{4}\cdot 12 \\ \Longleftrightarrow & y & = & 20\pm 9. \end{array}$$

Derivaatan nollakohdat ovat siis 11 ja 29. Jälkimmäinen ei kuulu tarkasteluvälille, joten halvimmat rakentamiskustannukset ovat y:n arvolla 11. Suora sijoitus f:n kaavaan antaa

$$f(11) = 1080000 \text{ euroa.}$$

Esimerkki Olkoon

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Tutki f:n suurinta ja pienintä arvoa joukossa $\mathbf{R}$.

Ratkaisu. Koska $1+x^2 > 0$ koko $\mathbf{R}$:ssä, on f jatkuva ja derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä. Lisäksi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Edelleen,

$$f'(x) = \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

kun $x = \pm 1$. Koska $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ja

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

niin on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(x)| < \frac{1}{4}$, kun $|x| \geq M$.

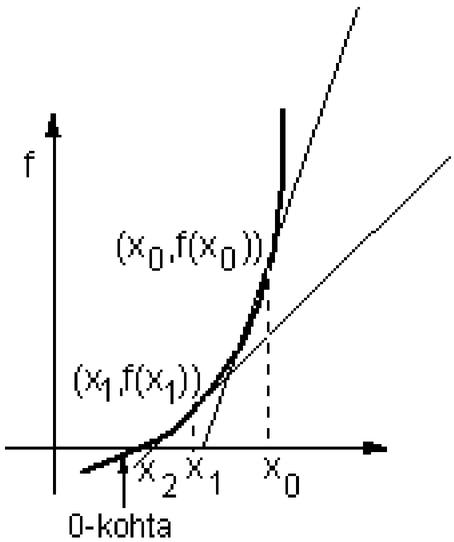
Väite: f:n suurin arvo on $\frac{1}{2}$ ja pienin arvo on $-\frac{1}{2}$.

Todistus. On osoitettava, että

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbf{R} \tag{4}$$

ja

$$f(x) \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$



Jos $|x| > M$, niin $|f(x)| < \frac{1}{4}$, joten (4) ja (5) toteutuvat. Tarkastellaan tilannetta $x \in [-M, M]$. Välin päätepisteissä $|f(M)|$, $|f(-M)| \leq \frac{1}{4}$, joten (4) ja (5) toteutuvat. Suurin ja pienin arvo ovat f':n nollakohdissa, eli suurin $f(1) = \frac{1}{2}$ ja pienin $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Muilla $x \in [-M, M]$ (4) ja (5) toteutuvat. $\square$

4.2 Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmän avulla voidaan approksimoida yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisuja, mikäli f toteuttaa tietyt edellytykset. Katso kuva (4.2).

Menetelmän ensimmäiset askeleet ovat seuraavat.

1. Arvataan (enemmän tai vähemmän perustellusti) lähtöpiste x_0 tarkasteluväliltä.

2. Piirretään pisteeseen x_0 funktion f kuvaajaan tangentti.

3. Asetetaan $x_1 :=$ tangentin ja x-akselin leikkauskohta.

4. Piirretään pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ tangentti.

5. Asetetaan $x_2 :=$ tangentin ja x-akselin leikkauskohta.

Yleisesti, jos piste x_n on löydetty, seuraava piste lasketaan kaavasta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tämä vastaa edellä mainittua geometrista menettelyä: Pisteen $(x_n, f(x_n))$ tangentin yhtälö on

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste $(x_{n+1}, 0)$ toteuttaa

$$\begin{aligned} 0 - f(x_n) &= f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \\ \Rightarrow x_{n+1} &= x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Newtonin menetelmässä siis arvataan x_0 (esimerkiksi kuvaajasta, mahdollisimman läheltä oletettua nollakohtaa). Jos n:s approksimaatio x_n on laskettu, x_{n+1} saadaan kaavasta (6).

Esimerkki Lasketaan $\sqrt{2}$:n likiarvo. Tämä vastaa yhtälön

$$f(x) := x^2 - 2 = 0$$

positiivisen ratkaisun arviointia.

Ratkaisu. Koska

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{ja} \quad f'(x) = 2x,$$

yhtälö (6) saa muodon

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Asetetaan $x_0 = 1$ ja lasketaan

$x_0 = 1$

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 1.41667$

$x_3 = 1.41422$ (5 oikeaa numeroa!)

Newtonin menetelmän suppenemisesta tiedetään seuraavaa. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta $r \in \mathbf{R}$. Jos on olemassa ympäristö $B(r, h)$, $h > 0$ ja C, $0 < C < 1$ siten, että

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq C \quad \forall x \in B(r, h)$$

niin Newtonin menetelmä suppenee arvoon r, jos x_0 on valittu joukosta $B(r, h)$.

4.3 Korkeammat derivaatat

Jos funktio f on derivoituva välin Δ jokaisessa pisteessä, derivaatta f' määrittelee funktion $\Delta \to \mathbf{R}$.

Jos tällä funktiolla on pisteessä x derivaatta, tätä sanotaan f:n toiseksi derivaataksi pisteessä x, merkitään $f''(x)$ tai $f^{(2)}(x)$. Yleisesti, n:n kertaluvun derivaatta $f^{(n)}(x)$ tai $D^{(n)}f(x)$ tai $\frac{d^n f}{dx^n}$, määritellään $(n-1)$:n kertaluvun derivaatan derivaattana.

Funktiota, jolla on kaikkien kertalukujen derivaatat, sanotaan C^∞ -funktioksi.

Esimerkki Polynomit ovat C^∞-funktioita (koko $\mathbf{R}$:ssä). Jos $\deg(P) = n$, niin

$$\deg \underbrace{(\frac{d^k P}{dx^k})}_{\text{polynomi}} = n - k, \quad k \leq n.$$

Jos $k > n$, niin

$$\frac{d^k P}{dx^k} = 0.$$

Esimerkki Kun $P = x^4 - 2x$,

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = D(4x^3 - 2) = 12x^2.$$

Esimerkki Olkoon $f(x) = |x|^3$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x \leq 0. \end{cases}$$

Alueessa $\{x > 0\}$ f on polynomi; täällä $f \in C^\infty(\{x > 0\})$. Alueessa $\{x < 0\}$ f on polynomi; täällä $f \in C^\infty(\{x < 0\})$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} 3x^2 & , x > 0 \\ -3x^2 & , x < 0 \end{cases} = 3x|x| \quad \forall x \neq 0 \\
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{|h|^3}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{hh|h|^3}{h} = 0 \\
f''(x) &= \begin{cases} 6x & , x > 0 \\ -6x & , x < 0 \end{cases} \\
f''(0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{3h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} 3|h| = 0 \\
f'''(x) &= \begin{cases} 6 & , x > 0 \\ -6 & , x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Koska f''':n oikeanpuoleinen derivaatta 0:ssa on

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{6h}{h} = 6.$$

Samoin nähdään, että vasemmanpuoleinen on -6. Näin ollen ei ole o lemassa derivaattaa $f'''(0)$.

Määritelmä Olkoon funktio f derivoituva välillä Δ. Käyrää $y = f(x)$ sanotaan alas(ylös)päin kuperaksi, jos käyrä ei ole missään pisteessä tangenttinsa alapuolella (yläpuolella).

Lause 4.13 Funktiosta f oletetaan

1. f on derivoituva välillä Δ
2. f' on kasvava välillä Δ ($f'(x) \geq f'(y)$, kun $x > y$).

Silloin käyrä on alaspäin kupera välillä Δ.

Tämä tapahtuu esimerkiksi jos $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$.

Määritelmä Piste x_0 on käännepiste, jos $f''(x_0) = 0$ ja $f''(x)$ on erimerkkinen pisteen x_0 eri puolilla (jossakin ympäristössä).

Esimerkki Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = (x - 4)^3.$$

Funktion toisen kertaluvun derivaatta ($f''(x) = 6(x - 4)$) saa negatiivisia arvoja kun $x < 4$ (alaspäin kupera) ja positiivisia kun $x > 4$ (ylöspäin kupera). Näin ollen 4 on f:n käännepiste.

Toista derivaattaa voidaan käyttää hyväksi ääriarvojen tutkimisessa.

Lause 4.14 Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, niin funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali minimi (vastaavasti jos $f''(x) < 0$, maksimi).

Todistus sivuutetaan.

Lause 4.15 Oletetaan että välillä $[a, \infty[$ määritetty funktio f toteuttaa

1. f ja f' ovat jatkuvia kun $x \geq a$.,
2. $f'(a) > 0$,
3. f'' on olemassa ja $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \geq a$.

Silloin

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

4.4 Lisää transsendenttisista alkeisfunktioista

Määrittelimme aiemmin Neperin luvun raja-arvona

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbf{R}.$$

Jos $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, olemme määritelleet a:n mielivaltaisen rationaalisen potenssin a^x, $x \in \mathbf{Q}$. Siis, kun $x \in \mathbf{Q}$, on myös luku e^x määritelty.

Seuraavan lauseen todistuksen jätämme nyt väliin:

Lause 4.16 Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{Q}$ jono siten, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Silloin jono $(e^{x_n})_{n=1}^{\infty}$ suppenee (johonkin reaalilukuun) ja raja-arvo ei riipu jonon (x_n) valinnasta. Jos $x \in \mathbf{Q}$ niin

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^x.$$

Näin ollen voimme määritellä:

Määritelmä 4.17 Kaikille $x \in \mathbf{R}$ määrittelemme

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{x_n},$$

missä $(x_n) \subset \mathbf{Q}$ on jono joka suppenee x:ään. Kuvausta $x \mapsto e^x$ sanotaan (e-kantaiseksi) eksponenttifunktioksi, merkitään myös $\exp(x)$.

Lause 4.18 Eksponenttifunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ kaikille $x, y \in \mathbf{R}$,
2. se on jatkuva, aidosti kasvava ja derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä,
3. $De^x = e^x$.

Tässä kohta 3. seuraa kaavasta

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

sekä eksponentin yhteenlaskukaavasta 1: Kaikilla $x \in \mathbf{R}$

$$De^x = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x.$$

Seuraus Funktion exp n:s derivaatta on exp kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Lause 4.19 Funktiolla exp on seuraavat raja-arvot:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Tarkemmin sanoen, jos $n \in \mathbf{N}$, niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^n = 0.$$

Todistus. Todistetaan (7):

$$D\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \frac{e^x x^n - ne^x x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}} > 0,$$

kun $x > n$.

$$D^{(2)}\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \ldots = \frac{e^x}{x^{n+2}}\Big((x-n)^2 + n\Big) > 0,$$

kun $x > 0$. Lauseesta 4.15 (sivu 16) seuraa, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

□

Esimerkki Lasketaan funktion xe^x n:s derivaatta. Väitämme, että se on

$$D^{(n)}(xe^x) = (n+x)e^x. \tag{8}$$

Todistus. Tapaus $n = 1$:

$$D(xe^x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

Induktio-oletus: Oletetaan että (8) pätee arvolla $n \in \mathbf{N}$. Silloin

$$\begin{aligned} D^{(n+1)}(xe^x) &= DD^{(n)}(xe^x) = D\Big((n+x)e^x\Big) = D(ne^x) + D(xe^x) \\ &= ne^x + (1+x)e^x = (n+1+x)e^x. \end{aligned}$$

Siis (8) pätee arvolla $n+1$. □

4.5 Logaritmifunktio

Funktio exp on aidosti kasvava koko **R**:ssä ja lisäksi $\exp(\mathbf{R}) =]0, \infty[$. Näin ollen exp:llä on käänteisfunktio

$$\left\{ \begin{array}{l} \log \\ \ln \end{array} \right. :]0, \infty[\to \mathbf{R}.$$

Muistisääntönä todetaan, että $\log x$ on luku, johon potenssiin e pitää korottaa, että saadaan x. Siis

$$e^{\log x} = x \quad \forall\, x > 0$$

ja

$$\log e^x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Lause 4.20 Jos $x, y > 0$, niin

- $\log(xy) = \log x + \log y$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$
- $\log(\frac{1}{x}) = \log(x^{-1}) = -\log x$
- $\log x^a = a \log x\ \forall a \in \mathbf{R}$.

Toditetaan näistä ensimmäinen: Eksponentin yhteenlaskukaavan nojalla

$$xy = e^{\log x} \cdot e^{\log y} = e^{\log x + \log y}.$$

Nyt $\log xy$ on se luku johon e pitää korottaa, että saadaan xy. Johtamamme kaavan nojalla kyseinen luku on

$$\log x + \log y. \qquad \square$$

Lause 4.21

$$D \log x = \frac{1}{x}\ \forall\ x > 0$$

ja

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\log x)^n} = \infty\ \forall\ n \in \mathbf{N}.$$

Todistus. Derivointikaava seuraa käänteisfunktion derivointikaavasta:

$$D \log x = \frac{1}{(D \exp)(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Jälkimmäinen kaava seuraa lauseesta 4.19 (sivu 18). $\square$

Huomatus Funktio log on aidosti kasvava, mutta sen kasvuvauhti on hyvin hidasta. Kuitenkin pätee

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty.$$

4.6 Muut exponentti- ja logaritmifunktiot

Olkoon $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$. Määritellään

$$a^x := e^{x \log a} = \exp(x \log a).$$

Tälle pätevät

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $Da^x = a^x \cdot \log a$

Funktio a^x on aidosti kasvava, jos $a > 1$ ja aidosti vähenevä jos $a < 1$.

Funktion a^x käänteisfunktio on funktio

$$\log_a x :]0, \infty[\to \mathbf{R}.$$

Tälle pätee

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

ja

$$D\left(\log_a x\right) = \frac{1}{(\log a)x}.$$

4.7 Yleinen potenssifunktio

Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Määritellään funktio

$$x \mapsto x^a, \quad x > 0$$

kaavalla

$$x^a := e^{a \log x}.$$

Kun

$a > 0$ on funktio kasvava,

$a < 0$ on funktio vähenevä ja

$a = 0$ on funktio vakiofunktio, $x^a = 1$.

Lause 4.22 Jos $a, b \in \mathbf{R}$ ja $x > 0$, niin

- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$
- $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$, $x > 0$
- $Dx^a = ax^{a-1}$.

Todistus. Todistetaan derivointikaava yhdistetyn funktion derivointikaavaa käyttäen:

$$Dx^a = De^{a \log x} = e^{a \log x} \cdot a\frac{1}{x} = x^a a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

□

Määritelmä Funktio $x \mapsto x^x$, $x > 0$, määritellään kaavalla

$$x^x = e^{x \log x}.$$

Motivaationa näille määritelmille on eksponentin laskusääntö

$$e^{xy} = (e^x)^y.$$

Tästä seuraa esimerkiksi

$$e^{x \log x} = (e^{\log x})^x = x^x.$$

4.8 Hyperboliset funktiot

Hyperbolinen sini:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Hyperbolinen kosini:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Hyperbolinen tangentti:

$$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hyperbolinen kotangentti:

$$\coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Hyperbolisille funktioille pätevät seuraavat yhtälöt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}.$$

Derivaatat:

$$\begin{array}{rcl} D\sinh x & = & \cosh x \\ D\cosh x & = & \sinh x \\ D\tanh x & = & \frac{1}{\cosh^2 x} \\ D\coth x & = & -\frac{1}{\sinh^2 x} \end{array}$$

Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan areafunktioiksi.

$$\begin{array}{rcl} (\sinh)^{-1}(x) & =: & \operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \ \forall\, x \in \mathbf{R} \\ (\cosh)^{-1}(x) & =: & \operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \text{ kun } x \geq 1 \\ (\tanh)^{-1}(x) & =: & \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \text{ kun } x \in \,]-1,1[\\ (\coth)^{-1}(x) & =: & \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \text{ kun } x \in \,]-1,1[\,. \end{array}$$