

Analyysi II, 3

Demo 3, kevät 2002

1. Olkoot f ja $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}f(x, y) &= (\sin x + y^2, \cos x) \\g(x, y) &= (y - 1, x - 1).\end{aligned}$$

Muodosta funktiot $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$ ja $g \circ g$, kaikki kuvauksia $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$.

2. Ovatko tehtävän 1 funktiot f ja g injektioita tai surjektioita? Ratkaise yhtälö

$$(g \circ g)(x_1, x_2) = (0, \pi).$$

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Muodosta funktio $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, missä $F_1(x, y) = f(x)$ ja $F_2(x, y) = f^2(y)$ (eli $(f \circ f)(y)$). Muodosta edelleen funktiot F^2 , $F + F^2$ sekä $F \cdot F^2$. (Mitä ovat näiden lähtö- ja maalijoukot?)

4. Muistutamme mieleen käänteiskuvauksen yleisen määritelmän: jos A ja B ovat joukkoja ja $f : A \rightarrow B$ on funktio, niin funktio $g : B \rightarrow A$ on f :n käänteisfunktio, mikäli se toteuttaa $(f \circ g)(x) = x$ kaikilla $x \in B$ ja $(g \circ f)(x) = x$ kaikilla $x \in A$.

Muodosta funktion $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + 100x_2^2)$$

käänteisfunktio.

Opastus. Ratkaise yhtälöstä $f(x_1, x_2) = (a, b)$ muuttujat x_1 ja x_2 tuntemattomien a ja b avulla.

5. Samoin, kun $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ja

$$f(x, y, z) = (y^3, x + z, x - z^3 + z).$$