

Analyysi II, 3

Demo 7, kevät 2002

1. Johda väliarvolausetta käyttäen yläraja lausekkeelle

$$|f(1, 50) - f(1 + h, 50 - 2h)|,$$

kun f on kahden muuttujan funktio

$$f(x, y) = e^{-(x+y)^2} + (x + y)^2$$

ja $h \in \mathbf{R}$, esimerkiksi $|h| \leq 1$. Löytämälläsi ylärajalla on oltava ominaisuus, että se lähestyy nollaa, kun $h \rightarrow 0$.

2. Erään kappaleen $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ lämpötila T ajan hetkellä t noudattaa kaavaa

$$T(t, \bar{x}) := 250 \exp\left(\frac{t}{1 + t|\bar{x}|^2} - \sin t\right),$$

missä $t > 0$ on aika sekunteina, $\bar{x} \in \Omega$ (pituusyksikkö metri), ja T on siis lämpötila hetkellä t pisteessä \bar{x} kelvineinä.

Arvioi, kuinka suuri virhe lämpötilan laskemisessa enintään tehdään hetkellä $t = 10$ pisteessä $\bar{x} = (1, 3, 8)$, jos aika pystytään mittaamaan sekunnin kymmenesosan ja paikka yhden millimetrin tarkkuudella. Johtopäätös mittausjärjestelyistä?

3. Sama, kun

$$T(t, \bar{x}) := 400 \exp\left(-\frac{|\bar{x}|^2}{t}\right).$$

(Huom. Tehtävän 2 funktio T on kuvitteellinen, mutta tehtävän 3 T vastaa paremmin todellisuutta; se on lineaarisen lämpö- eli diffuusioyhtälön ratkaisu eräessä tilanteessa.)

4. Yhtälö

$$e^{-(x+1)^2-y^2} - e^{-x^2-(y-1)^2} = 0$$

määrittelee y :n x :n funktiona pisteen $(1, 1)$ eräessä ympäristössä. (Totea tämä!). Mikä on $y'(-1)$?

5. Voidaanko z ratkaista x :n ja y :n avulla pisteen $(1, 100, -1)$ ympäristössä yhtälöstä

$$\frac{(z + 2)^2 - x}{1 + (x - 1)^4 + (y - 2)^2} + z + 1 = 0 ?$$

Jos näin on, laske $D_1z(1, 100)$ ja $D_2z(1, 100)$.