Analyysi II, 3
Kertaustehtävät, kevät 2002,

Nämä ovat **kertaustehtäviä**, joita laskemalla voit valmentautua toiseen välikokeeseen (tai tenttiin). Tehtävien **ratkaisut** ovat myös saatavana verkosta pdf-muodossa (AnII1402rat.pdf).

1. Määrää funktion
$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$
ääriarvot ja satulapisteet

2. Määrääkö kuvaus
$$f(x,y) = xe^y - y + 1 = 0$$
implisiittisesti funktion $y = y(x)$ pisteen $(-1,0)$ ympäristössä. Siinä tapauksessa määrää $y'(-1)$.

3. Etsi funktion $f(x,y) = x^2y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa
$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentioituva kuvaus s.e.
$$D_1 f(x,y) > 0 \quad \text{ja} \quad D_2 f(x,y) < 0$$
kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Todista, että
$$f(1,3) > f(-1,5)$$

5. Parametrisoi ellipsoidin $x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 36$ ja tason $x = y$ leikkauskäyrä. (Vrt. Demo 10 tehtävä 5 b.)

6. Olkoon Γ jana origosta pisteeseen (a,b). Laske
$$\int_\Gamma (y^2 - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

7. Olkoon $A = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ x + |y| \leq 1\}$. Laske
$$\int_{\partial A} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$$

8. Olkoon
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x,y \text{ ovat rationaalilukuja} \\ 0\,, & \text{muulloin} \end{cases}$$
Esitä perustelu sille, että f ei ole Riemann-integroituva suorakulmiossa $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ Ks. Lause 7.5. Mikä sen oletuksista ei ole voimassa?

9. Laske vektorikentän

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\,, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

potentiaali alueessa $\{(x,y) \mid x > 0\}$.

10. Määrää vektorikentän

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(\frac{x-2y}{(y-x)^2}\,, \frac{y}{(y-x)^2} \right)$$

ehdon $u(2,1) = 0$ toteuttava potentiaali. Laske lisäksi käyräintegraali

$$\int_\Gamma f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y,$$

kun Γ on mikä tahansa käyrä pisteestä $(2,1)$ pisteeseen $(4,1)$.

11. Tiedät varmasti, että

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q} \\ 3y^2\,, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ei ole integroituva suorakulmiossa $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$. Osoita (laskemalla), että integraali

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

on silti olemassa.

12. Laske tetraedrin $\{(x,y,z) \mid x \ge 0,\, y \ge 0,\, z \ge 0,\, x+y+z \le 1\}$ tilavuus
a) integroimalla korkeutta yli pohjan **b)** MAOLin taulukoista löytyvällä kaavalla

13. Laske nelikulmion, jonka kärkipisteet ovat $(0,0), (0,1), (1,1)$ ja $(1,0)$, pinta-ala Greenin kaavan avulla. Vihje: Etsi ensin kuvaus, jolle pätee $D_1 f_2 - D_2 f_1 = 1$.

14. Määrää ympyrän $x^2+y^2=4$ painopiste, kun sen tiheysfunktio on $\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$