Analyysi II, 3

Kertaustehtävät ja ratkaisut, kevät 2002

Nämä ovat **kertaustehtäviä**, joita laskemalla voit valmentautua toiseen välikokeeseen (tai tenttiin).

1. Määrää funktion

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$

ääriarvot ja satulapisteet

Ratkaisu. Lasketaan ensin

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 12x - 6x^2 + 6y \\ D_2 f(x,y) &= 6y + 6x \end{aligned}$$

ja ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ D_2 f(x,y) = 6y + 6x = 0 \end{cases}$$

Ratkaisuna saadaan pisteet

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{ja } (x,y) = (1,-1)$$

Lasketaan

$$\begin{aligned} D_{11} f(x,y) &= 12 - 12x \\ D_{22} f(x,y) &= 6 \\ D_{12} f(x,y) &= 6 \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0,0) &= D_{11} f(0,0) D_{22} f(0,0) - (D_{12} f(0,0))^2 \\ &= 12 \cdot 6 - 6^2 = 36 > 0 \end{aligned}$$

ja $D_{11} f(0,0) > 0$, joten $(0,0)$ on lokaali minimi. Toisaalta

$$\mathcal{D}(1,-1) = D_{11} f(1,-1) D_{22} f(1,-1) - (D_{12} f(1,-1))^2 = -36 < 0$$

joten $(1,-1)$ on satulapiste.

2. Määrääkö kuvaus

$$f(x,y) = xe^y - y + 1 = 0$$

implisiittisesti funktion $y = y(x)$ pisteen $(-1,0)$ ympäristössä. Siinä tapauksessa määrää $y'(-1)$.

Ratkaisu. Piste $(-1,0)$ toteuttaa yhtälön ja $D_2 f(-1,0) = -2 \neq 0$ joten implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa kuvaus $y = y(x)$ ja

$$y'(-1) = -\frac{D_1 f(-1,0)}{D_2 f(-1,0)} = \frac{1}{2}.$$

3. Etsi funktion $f(x,y) = x^2y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

Ratkaisu. Joukossa A ei ole sisäpisteitä, joten on tarkasteltava ainoastaan funktion arvot yksikkökiekon reunalla sekä origossa.

Yksikkökiekon reunalla pätee $x^2 + y^2 = 1$ eli $y^2 = 1 - x^2$, joten funktio saa siellä arvoja

$$f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x^2(1-x^2) = x^2 - x^4 =: h(x)$$

Tapaus voidaan käsitellä kuten etsittäessä yhden muuttujan funktion h suurinta ja pienintä arvoa suljetulla välillä $[-1,1]$ Nyt

$$h'(x) = 2x - 4x^3 = 0, \text{ kun } x = 0 \text{ tai } x = \pm 1/\sqrt{2}$$

Jatkuva funktio h (ja samalla f) saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa:

$$h(-1) = h(1) = h(0) = 0 \qquad h(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4}$$

Sekä lisäksi

$$f(0,0) = 0$$

Näistä vaihtoehdoista nähdään, että

Pienin arvo on 0
Suurin arvo on $\frac{1}{4}$

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentioituva kuvaus s.e.

$$D_1 f(x,y) > 0 \quad \text{ja} \quad D_2 f(x,y) < 0$$

kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Todista, että

$$f(1,3) > f(-1,5)$$

Ratkaisu. Kuvaus f toteuttaa väliarvolauseen oletukset. Tällöin on olemassa $\theta \in]0,1[$ siten, että

$$\begin{aligned} f(1,3) - f(-1,5) &= \nabla f(-1+2\theta, 5-2\theta) \cdot (2,-2) \\ &= \underbrace{D_1 f(-1+2\theta, 5-2\theta) \cdot 2}_{>0} + \underbrace{D_2 f(-1+2\theta, 5-2\theta) \cdot (-2)}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

5. Parametrisoi ellipsoidin $x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 36$ ja tason $x = y$ leikkauskäyrä. (Vrt. Demo 10 tehtävä 5 b.)

Ratkaisu. Leikkauskäyrän pisteet x, y, z toteuttavat yhtälöt

$$x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 36 \qquad \text{ja} \qquad x = y$$

Sijoittamalla jälkimmäinen ensimmäiseen saadaan

$$17x^2 + 9z^2 = 36$$

eli

$$\frac{x^2}{(\frac{6}{\sqrt{17}})^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

mikä on ellipsin yhtälö. Muistetaan, että $x = y$ ja parametrisoidaan ellipsi demoissa 10 opitulla tavalla

$$\begin{cases} x &= \frac{6}{\sqrt{17}}\cos t \\ y &= \frac{6}{\sqrt{17}}\cos t \\ z &= 2\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

tai toisin sanoen

$$\varphi(t) = (\frac{6}{\sqrt{17}}\cos t\,,\ \frac{6}{\sqrt{17}}\cos t\,,\ 2\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

6. Olkoon Γ jana origosta pisteeseen (a, b). Laske

$$\int_\Gamma (y^2 - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

Ratkaisu. Janan parametrisointi:

$$\varphi(t) = (ta\,,\ tb) \quad t \in [0, 1]$$

Tarvitaan vielä

$$\varphi_1{}'(t) = a \quad \varphi_2{}'(t) = b,$$

jonka jälkeen lasketaan määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (y^2 - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y &= \int_0^1 ((tb)^2 - tb)a\,\mathrm{d}t + tab\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 ab^2t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}ab^2 \end{aligned}$$

7. Olkoon $A = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ x + |y| \leq 1\}$. Laske

$$\int_{\partial A} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$$

Ratkaisu. Joukko A osoittautuu kolmioksi, joten sen reuna ∂A koostuu kolmesta janasta: Nimetään ne $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Voisimme parametrisoida nämä janat ja laskea käyräintegraalin (kolmessa osassa) kuten edellisessä tehtävässä tyyliin

$$\int_{\partial A} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_3} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \ldots = -1/3$$

(Kokeile itse, jos et usko!)

Tämän sijasta voimme käyttää Greenin lausetta ja havaita

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y &= \int\int_A D_1x^2 - D_2y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-1+x}^{1-x} 2x - 1 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 -4x^2 + 6x - 2\mathrm{d}x = -1/3
\end{aligned}$$

jolloin vältymme pitkiltä laskuilta.

8. Olkoon

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x, y \text{ ovat rationaalilukuja} \\ 0\ , & \text{muulloin} \end{cases}$$

Esitä perustelu sille, että f ei ole Riemann-integroituva suorakulmiossa $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ Ks. Lause 7.5. Mikä sen oletuksista ei ole voimassa?

Ratkaisu. Jaettiinpa suorakulmio miten pieniin osasuorakulmioihin (tai neliöihin) tahansa, on jokaisessa osasuorakulmiossa sekä rationaali- että irrationaalikoordinaatein olevia pisteitä . Silloin jokaisessa suljetussa osasuorakulmiossa (käyttäen luennolla esiintyneitä merkintöjä) funktion suurin arvo $G_{n,k,l} = 1$ ja pienin $g_{n,k,l} = 0$. Näin ollen

$$\text{yläsumma} \quad M_n = 1 \quad \text{ja alasumma} \quad m_n = 0$$

jokaisella jaolla n, joten

$$\lim_{n\to\infty} M_n \neq \lim_{n\to\infty} m_n$$

ja funktio ei ole (Riemann-) integroituva. Funktio ei ole myöskään jatkuva yhdessäkään määrittelyjoukkonsa pisteessä, mikä on vastaus lisäkysymykseen.

9. Laske vektorikentän

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\,,\,\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

potentiaali alueessa $\{(x,y) \mid x > 0\}$.

Ratkaisu. Ensin on syytä tarkastaa potentiaalin olemassaolon edellytykset: Vektorikenttä on jatkuvasti derivoituva tarkasteltavassa alueessa. Jos potentiaali u on olemassa, ovat sen osittaisderivaatat (f_1 ja f_2) siis jatkuvia ja jatkuvasti derivoituvia. Mahdollisen potentiaalin u tulee tämän vuoksi toteuttaa ehto

$$D_{12}u(x,y) = D_{21}u(x,y) \qquad \text{vrt. Lause 3.2} \tag{1}$$

eli

$$D_2 f_1(x,y) = D_1 f_2(x,y)$$

mikä toteutuu (tarkasta välivaiheet laskemalla itse) koska

$$D_2 f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2} = D_1 f_2(x,y).$$

Koska käsiteltävä alue on *yhdesti yhtenäinen* pätee implikaatio toiseenkin suuntaan (Lause 6.4), eli ominaisuudesta (1) seuraa potentiaalifunktion olemassa olo **koko** alueessa $\{(x,y) \mid x > 0\}$. Nyt täytyisi vain löytää potentiaalifunktio konkreettisesti. Jos $y \neq 0$ voidaan laskea seuraavasti

$$\int \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/y}{(\frac{x}{y})^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(\frac{x}{y}) + C$$

Tällöin potentiaali u on muotoa

$$u(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + C(y),$$

missä C on joko vakio tai mahdollisesti y:n funktio, mutta ei riipu x:stä. Koska u on vektorikentän f potentiaali on oltava voimassa

$$D_2 u(x,y) = f_2(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

Toisaalta

$$D_2 u(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + C'(y)$$

joten $C(y)$ on vakio. Potentiaali on siis

$$u(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

Koska tämä potentiaalifunktio ei ole määritelty puolisuoralla $\{(x,y) \mid x > 0\,,\ y = 0\}$, ja kuitenkin vektorikentällä on potentiaali koko alueessa, on vielä jatkettava ongelmanratkaisua. Tiedämme nyt potentiaalin lausekkeen tapauksissa $y > 0$ ja $y < 0$, mutta tapaus $y = 0$ on vielä käsittelemättä. Potentiaali on nyt muotoa

$$u(x,y) = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{y}) + C_1, & \text{kun } y < 0 \\ h(x)\ , & \text{kun } y = 0 \\ \arctan(\frac{x}{y}) + C_2\ , & \text{kun } y > 0 \end{cases}$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ vakioita, ja h vielä toistaiseksi tuntematon funktio. **Huomaa,** että ne pisteet, joissa $y = 0$ halkaisevat alueen kahteen osaan ja eri osissa integroimisvakio C ei välttämättä olekaan sama. Pisteissä, joissa $y = 0$ on annetun vektorikentän perusteella

$$D_1 u(x,0) = f_1(x,0) = 0 \quad (\text{ VAKIO !}),$$

joten tuntematon kuvaus h on vakio muuttujan x suhteen (muuttuja y on aina nolla, kun h:ta tarvitaan) ja tässä vaiheessa

$$u(x,y) = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{y}) + C_1\ , & \text{kun } y < 0 \\ C_3\ , & \text{kun } y = 0 \\ \arctan(\frac{x}{y}) + C_2\ , & \text{kun } y > 0 \end{cases} .$$

Kuvauksen u on oltava koko alueessa $\{(x,y) \mid x > 0\}$ jatkuvasti derivoituvana kuvauksena differentioituva, ja siten siis jatkuva. Tästä saadaan kaksoisehto

$$\lim_{h\to 0-} \Big(\arctan(\frac{x}{h}) + C_1\Big) = C_3 = \lim_{h\to 0+} \Big(\arctan(\frac{x}{h}) + C_2\Big)$$

josta saadaan

$$-\frac{\pi}{2} + C_1 = C_3 = \frac{\pi}{2} + C_2$$

ja potentiaali on nyt kuvaus

$$u(x,y) = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{y}) + C + \frac{\pi}{2}\ , & \text{kun } y < 0 \\ C\ , & \text{kun } y = 0 \\ \arctan(\frac{x}{y}) + C - \frac{\pi}{2}\ , & \text{kun } y > 0 \end{cases} , \quad C \in \mathbb{R}$$

Nuorta tutkijaa kiinnostaa vielä tietää, toteutuuko myös ehto

$$D_2 u(x,0) = f_2(x,0) = -\frac{1}{x} \quad ?$$

Osittaisderivaatan voidaan laskea lähtien määritelmästä

$$\lim_{h\to 0-} \frac{u(x,h) - u(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\arctan(\frac{x}{h}) + C + \frac{\pi}{2} - C}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{-x/h^2}{1+(x/h)^2}}{1} = -\frac{1}{x}$$

ja vastaavasti

$$\lim_{h\to 0+} \frac{u(x,h) - u(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\arctan(\frac{x}{h}) + C - \frac{\pi}{2} - C}{h} = -\frac{1}{x}$$

Nyt olemme määrittäneet potentiaalin annetulle vektorikentälle vaaditussa alueessa. (Raja-arvon laskemiseksi on käytetty L'Hospitalin sääntöä, ks. Calculus sivu 578).

10. Määrää vektorikentän

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(\frac{x-2y}{(y-x)^2}\,, \frac{y}{(y-x)^2} \right)$$

ehdon $u(2,1) = 0$ toteuttava potentiaali. Laske lisäksi käyräintegraali

$$\int_\Gamma f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y,$$

kun Γ on mikä tahansa käyrä pisteestä $(2,1)$ pisteeseen $(4,1)$.

Ratkaisu. Nyt

$$D_2 u(x,y) = \frac{y}{(y-x)^2}$$

ja

$$\int \frac{y}{(y-x)^2}\,\mathrm{d}y = \ln|y-x| - \frac{x}{y-x} + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

joten

$$u(x,y) = \ln|y-x| - \frac{x}{y-x} + C(x).$$

Koska

$$D_1 u(x,y) = \frac{x-2y}{(y-x)^2} + C'(x)$$

on $C'(x) = 0$ ja C siten vakio, joka määrätään alkuehdosta

$$u(2,1) = \ln|1-2| - \frac{2}{1-2} + C = 0.$$

Näin ollen

$$u(x,y) = \ln|y-x| - \frac{x}{y-x} - 2$$

Käyräintegraali saadaan nyt helposti

$$\int_\Gamma f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y = u(4,1) - u(2,1) = \ln 3 - 2/3.$$

11. Tiedät varmasti, että

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q} \\ 3y^2\,, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ei ole integroituva suorakulmiossa $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$. Osoita (laskemalla), että integraali

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

on silti olemassa.

Ratkaisu. Integraalissa

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \tag{2}$$

esiintyvä sisempi integraali on määritelty kaikilla $x \in [0,1]$, sillä jos x on rationaaliluku, niin

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 3y^2\,\mathrm{d}y = 1$$

ja jos x on irrationaaliluku, niin

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 1\,\mathrm{d}y = 1.$$

Näin ollen integraali (2) on laskettavissa

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$$

Integrointijärjestystä ei kannata ainakaan tässä vaihtaa.

12. Laske tetraedrin $\{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$ tilavuus **a)** integroimalla korkeutta yli pohjan **b)** MAOLin taulukoista löytyvällä kaavalla

Ratkaisu. a) Korkeus on $h(x,y) = 1-x-y$, ja pohja on xy-tason osajoukko, jossa

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq 1-x.$$

Siis integroidaan

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 1/2(1-x)^2\,\mathrm{d}x = 1/6$$

b) Tetraedrin tilavuus (MAOL: vektorilaskenta) Tetraedrin virittävät vektorit

$$\bar{a} = (1,0,0), \quad \bar{b} = (0,1,0), \quad \text{ja} \quad \bar{c} = (0,0,1)$$

Tilavuus saadaan kaavasta

$$V = \frac{1}{6}|\overline{abc}| = \frac{1}{6}\,\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c} = \frac{1}{6}\,(1,0,0)\cdot(1,0,0) = \frac{1}{6}$$

13. Laske nelikulmion, jonka kärkipisteet ovat $(0,0), (0,1), (1,1)$ ja $(1,0)$, pinta-ala Greenin kaavan avulla. Vihje: Etsi ensin kuvaus, jolle pätee $D_1f_2 - D_2f_1 = 1$.

Ratkaisu. Nelikulmion (neliö) pinta-alahan on tietysti yksi, mutta tässä on tarkoitus havainnollistaa Greenin kaavaa. Siis kaavan mukaan

$$\int\int_A 1 = \int\int_A D_1f_2 - D_2f_1 = \int_{\partial A} f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y$$

kun f_1 ja f_2 valitaan sopivasti. Valitaan vaikkapa $f(x,y) = (0,x)$, jolloin $D_1f_2 - D_2f_1 = 1$ ja

$$\int_{\partial A} f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y = \int_{\partial A} x\mathrm{d}y$$

Neliön A reuna koostuu neljästä janasta (piirrä kuva!) , joista kahdessa y on vakio ja integraali y:n suhteen nolla. Toinen jäljelle jäävistä janoista on sellainen, että integroitava x on nolla. Integraali on nollasta poikkeava siis vain sillä janalla, missä $x = 1$ ja $y : 0 \to 1$, siis

$$\int_{\partial A} x \mathrm{d}y = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}y = 1$$

14. Määrää ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ painopiste, kun sen tiheysfunktio on $\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ratkaisu. Ympyrä $x^2 + y^2 = 4$ voidaan parametrisoida seuraavasti

$$\begin{cases} x &= 2\cos\theta \\ y &= 2\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

ja tiheysfunktio on sijoituksen jälkeen

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2^2\cos^2\theta + 2^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{2}$$

kaikilla $\theta \in [0, 2\pi]$. Painopisteen selvittämiseksi on laskettava kolme integraalia

$$\int x\rho(x, y)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2\cos\theta \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2\cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$$

ja

$$\int y\rho(x, y)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2\sin\theta \frac{1}{2} \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\theta \mathrm{d}\theta = 0$$

sekä

$$\int \rho(x, y)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Siis painopiste on epäilemättä origo.