Analyysi II

Jari Taskinen

16. huhtikuuta 2002

Luku 1

Sisältö

1. Vektoriavaruudet $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$

Vektoriavaruudet $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$

Merkitään

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^2 &:= \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\} \\
\mathbf{R}^3 &:= \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbf{R}\} \\
\mathbf{R}^n &:= \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_j \in \mathbf{R},\ \forall\, j = 1,\ldots,n\} \text{ (tässä } n \in \mathbf{N}\text{)}
\end{aligned}$$

Näiden joukkojen alkioita sanotaan *pisteiksi* tai *vektoreiksi* ja niitä merkitään esimerkiksi

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \\
\overline{y} &= (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \\
\overline{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4
\end{aligned}$$

Lukua x_1 sanotaan pisteen $\overline{x}$:n 1. komponentiksi/koordinaatiksi, lukua x_2 pisteen $\overline{x}$:n 2. komponentiksi/koordinaatiksi, jne. Nollavektori on $\overline{0} = (0,0) \in \mathbf{R}^2$, $\overline{0} = (0,0,0) \in \mathbf{R}^3 \ldots$ sitä sanotaan myös origoksi.

Tarkastellaan avaruutta $\mathbf{R}^2$. Vektorien $\overline{x} = (x_1, x_2)$ ja $\overline{y} = (y_1, y_2)$ yhteenlasku määritellään kaavalla

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Esimerkki

$$(1,10) + (3,\pi) + (-4,0) = (1 + 3 + (-4), 10 + \pi + 0) = (0, 10 + \pi).$$

Sisältö:

Vektorin $\overline{x} = (x_1, x_2)$ kertominen reaaliluvulla a määritellään

$$a\overline{x} = (ax_1, ax_2).$$

Esimerkki

$$5(e, e^2) = (5e, 5e^2).$$

Vektorien $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ erotus määritellään

$$\overline{x} - \overline{y} = \overline{x} + (-\overline{y}),$$

missä $-\overline{y} = -1 \cdot (y_1, y_2) = (-y_1, -y_2)$.

Merkitään $\overline{e}_1 = (1, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1)$ (kantavektorit). Jos vektori $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, niin se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$$

tai

$$\overline{e}_1 = \overline{i} \quad \text{ja} \quad \overline{e}_2 = \overline{j}.$$

Siis myös

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}.$$

Jos $n \in \mathbf{N}$, niin määritelmät ovat analogisia. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \\ \overline{y} &= (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Määritellään

$$\begin{aligned}
\overline{x}+\overline{y} &:= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \in \mathbf{R}^n,\\
a\overline{x} &:= (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) \in \mathbf{R}^n,\\
-\overline{x} &:= (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbf{R}^n
\end{aligned}$$

ja kantavektorit

$$\begin{aligned}
\overline{e}_1 &= (1,0,0,\ldots,0),\\
\overline{e}_2 &= (0,1,0,\ldots,0),\\
&\vdots\\
\overline{e}_n &= (0,0,0,\ldots,1).
\end{aligned}$$

Jos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, niin

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \cdots + x_n\overline{e}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{e}_j.$$

Olkoon $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. Niiden sisätulo (skalaari-, pistetulo) määritellään

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki Tapauksessa $n = 4$, lasketaan sisätulo

$$(1, 0, -2, \frac{1}{2}) \cdot (1, 0, 1, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = -1.$$

Lause 1.1 Jos $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^n$ ja $a, b \in \mathbf{R}$, niin

a) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$

b) $\overline{x} \cdot (a\overline{y} + b\overline{z}) = a\overline{x} \cdot \overline{y} + b\overline{x} \cdot \overline{z}$

c) $\overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$ (ja $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0$ jos ja vain jos $\overline{x} = \overline{0}$).

Esimerkki Jos $n = 3$, $\overline{x} = (1, 1, 0)$, $\overline{y} = (0, 3, -1)$, $\overline{z} = (0, 1, 2)$, $a = 1$ ja $b = 2$, niin

$$\overline{x} \cdot (a\overline{y} + b\overline{z}) = (1, 1, 0) \cdot [(0, 3, -1) + (0, 2, 4)] = (1, 1, 0) \cdot (0, 5, 3) = 5.$$

Toisaalta

$$a\overline{x} \cdot \overline{y} + b\overline{x} \cdot \overline{z} = (1, 1, 0) \cdot (0, 3, -1) + 2(1, 1, 0) \cdot (0, 1, 2) = 3 + 2 = 5.$$

Vektorin $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ *pituus eli normi* määritellään

$$|\,\overline{x}\,| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}.$$

Lause 1.2

a) $|\,\overline{x}\,| \geq 0$

b) $|\,a\overline{x}\,| = |\,a\,|\,|\,\overline{x}\,|\,,\ \forall\, a \in \mathbf{R}$

c) $|\,\overline{x} \cdot \overline{y}\,| \leq |\,\overline{x}\,|\,|\,\overline{y}\,|$ (Schwarzin epäyhtälö)

d) $|\,\overline{x} + \overline{y}\,| \leq |\,\overline{x}\,| + |\,\overline{y}\,|$ ($\triangle$-ey)

e) $|\,\overline{x}-\overline{y}\,| \geq |\,|\,\overline{x}\,| - |\,\overline{y}\,|\,|$

Merkitään vielä

$$d(\overline{x},\overline{y}) := |\,\overline{x}-\overline{y}\,| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2)}$$

(pisteiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ etäisyys).

Jos $\overline{x},\overline{y} \in \mathbf{R}^n$ ja $\overline{x}\cdot\overline{y}=0$, niin sanotaan, että $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, merkitään $\overline{x}\perp\overline{y}$.

1.1. Geometrinen havainnollistus

Geometrinen havainnollistus

Taso $\mathbf{R}^2$: Katso kuvat 1 ja 2. Avaruus $\mathbf{R}^3$: Katso kuva 3.

1.2. Tason topologiaa

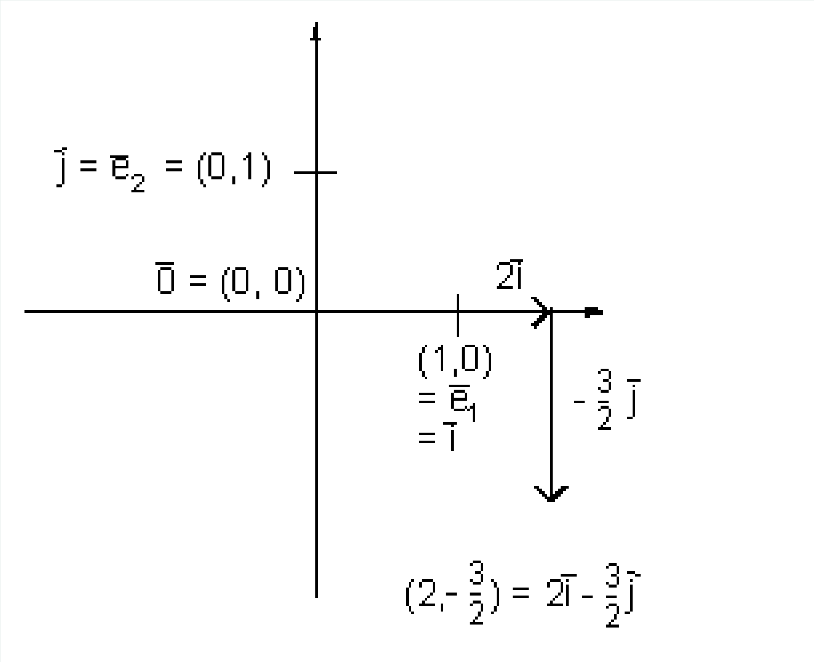
Tason topologiaa

Määritelmä 1.3 Olkoon $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ jono vektoreita $\mathbf{R}^2$:ssa. Jono suppenee kohti pistettä $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$, jos

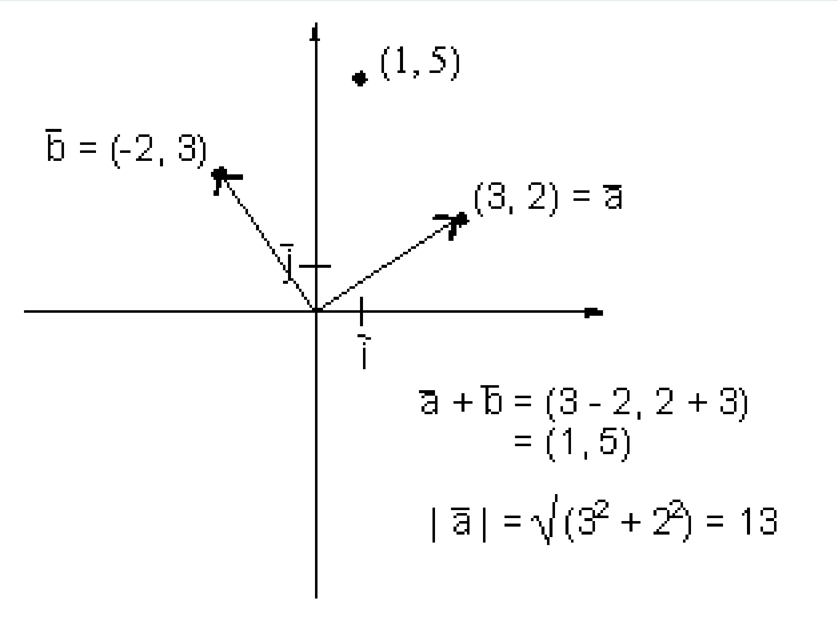
$$\lim_{k\to\infty} |\,\overline{x}_k - \overline{x}\,| = 0 \tag{1}$$

Tällöin merkitään

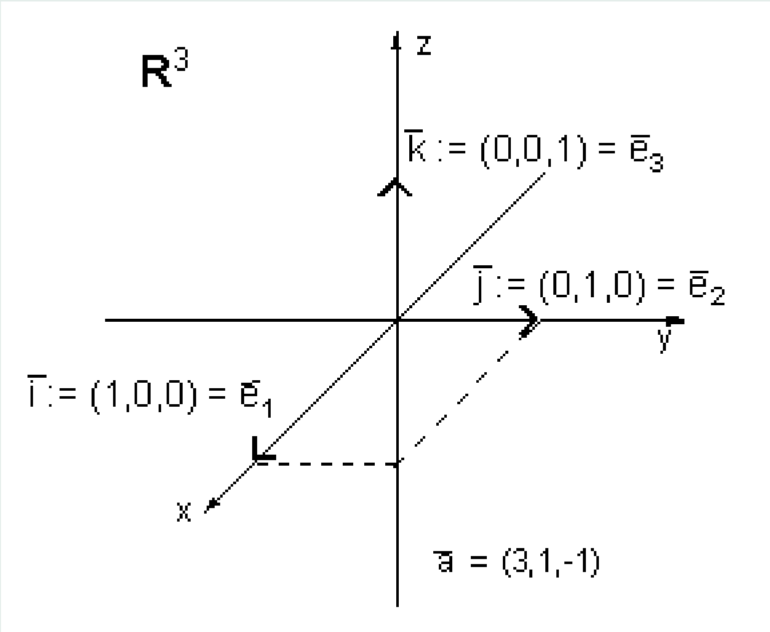
$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}.$$



Kuva 1: Taso $\mathbf{R}^2$



Kuva 2: Taso $\mathbf{R}^2$



Kuva 3: Avaruus $\mathbf{R}^3$

Ehto (1) tarkoittaa: Kaikilla $r > 0$ voidaan löytää luku $N \in \mathbf{N}$ seuraavasti:

$$|\,\overline{x}_k - \overline{x}\,| < r, \text{ jos } k > N.$$

Esimerkki. Olkoon

$$\overline{x}_k = \left(2 + \frac{1}{k}, \frac{k-3}{k}\right), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Kysymys: suppeneeko jono

$$(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^2.$$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= (2 + \tfrac{1}{1}, \tfrac{1-3}{1}) = (3, -2) \quad (\neq x_1) \\
\overline{x}_2 &= (2 + \tfrac{1}{2}, \tfrac{2-3}{2}) = (2\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \\
\overline{x}_3 &= (2\tfrac{1}{3}, 0) \\
\overline{x}_4 &= (2\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) \\
\overline{x}_5 &= (2\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Väite:

$$\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k = (2, 1) =: \overline{x}$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
|\,\overline{x}_k - \overline{x}\,| &= \left|\,(2 + \tfrac{1}{k}, \tfrac{k-3}{k}) - (2, 1)\,\right| = \left|\,(\tfrac{1}{k}, \tfrac{k-3-k}{k})\,\right| \\
&= \left|\,\tfrac{1}{k}, \tfrac{-3}{k}\,\right| = \left|\,\tfrac{1}{k}(1, -3)\,\right| = \tfrac{1}{k}\,|\,(1, -3)\,| = \frac{\sqrt{10}}{k}.
\end{aligned}$$

Tämä lähestyy nollaa, kun k lähestyy ääretöntä. $\square$

Lause 1.4 Olkoon $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^2$ jono vektoreita, $x_k = (x_{1k}, x_{2k})$ ja $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Tällöin

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} \iff \begin{cases} \lim_{k\to\infty} x_{1k} &= x_1 \\ \lim_{k\to\infty} x_{2k} &= x_2. \end{cases}$$

Esimerkki Olkoon

$$\overline{x}_k = \left(\sin\left(\frac{1}{k}\right), \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right), \qquad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Tässä $x_{1k} = \sin(\frac{1}{k})$ ja $x_{2k} = \cos(\frac{1}{k})$.

Pätee:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x_{1k} &= \lim_{k\to\infty} \sin(\tfrac{1}{k}) = 0 \\ \lim_{k\to\infty} x_{2k} &= \lim_{k\to\infty} \cos(\tfrac{1}{k}) = 1, \end{aligned}$$

joten lauseen 1.4 nojalla

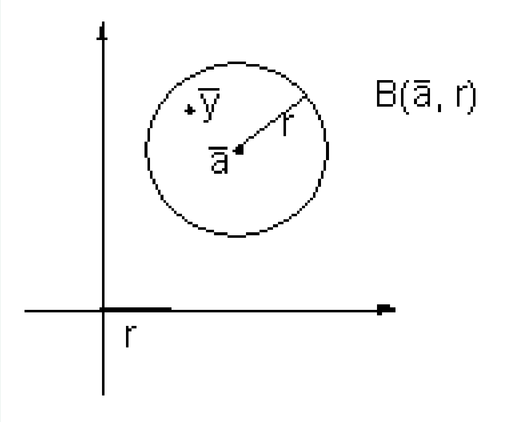
$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = (0, 1) \in \mathbf{R}^2.$$

Lause 1.5 Jos $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}$, $\lim_{k\to\infty} \overline{y}_k = \overline{y}$ ja $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ on sellainen jono, että $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, niin

a) $\lim_{k\to\infty}(\overline{x}_k + \overline{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k + \lim_{k\to\infty} \overline{y}_k = \overline{x} + \overline{y}$,

b) $\lim_{k\to\infty} a_k \overline{y}_k = a\overline{y}$,

c) $\lim_{k\to\infty}(\overline{x}_k \cdot \overline{y}_k) = \overline{x} \cdot \overline{y}$.



Kuva 4: $B(\overline{a}, r)$

Olkoon $\overline{a} := (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2, r > 0.$

Määritelmä 1.6 $\overline{a}$-keskeinen r-säteinen avoin pallo (kiekko) on joukko

$$B(\overline{a}, r) = \left\{ \overline{y} \in \mathbf{R} \;\middle|\; |\,\overline{y} - \overline{a}\,| < r \right\}.$$

Huomaan, että

$$|\,\overline{y} - \overline{a}\,| = \sqrt{(y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2}$$

on pisteiden $\overline{y}$ ja $\overline{a}$ etäisyys! Katso kuva 4. Joukkoa $B(\overline{a}, r)$ sanotaan myös $\overline{a}$:n (r-säteiseksi) palloympäristöksi.

Vastaavasti määritellään *suljettu kiekko*

$$B(\overline{a}, r) := \left\{ \overline{y} \;\middle|\; |\,\overline{y} - \overline{a}\,| \leq r \right\}$$

(sisältää kiekon reunan) ja *punkteerattu kiekko*

$$B(\overline{a}, r) := \left\{ \overline{y} \;\middle|\; 0 < |\,\overline{y} - \overline{a}\,| < r \right\}.$$

Vielä toistamme, että

$$\overline{y} \in B(\overline{a}, r) \iff (y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2 < r^2.$$

Määritelmä 1.7 Joukko $A \subset \mathbf{R}^2$ on avoin, jos jokaista $\overline{x} \in A$ kohti on olemassa sellainen kiekko $B(\overline{x}, r)$, että $B(\overline{x}, r) \subset A$.

Esimerkki Osoitetaan että joukko

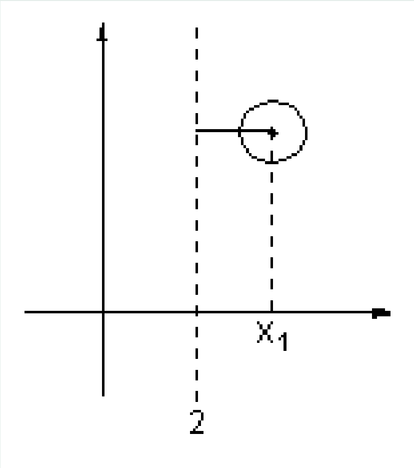
$$A := \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 > 2\}$$

on avoin. Katso kuva 5.

Olkoon $\overline{x} \in A$. Silloin $x_1 > 2$. Valitaan $r := \frac{x_1 - 2}{20}$. On osoitettava, että jos $\overline{y} \in B(\overline{x}, r)$, niin $\overline{y} \in A$. Pätee

$$|\,y_1 - x_1\,| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2} \leq \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq r = \frac{x_1 - 2}{20}.$$

Tarkastellaan kahta tapausta 1. Jos $y_1 \geq x_1$, niin $y_1 > 2$ (sillä $x_1 > 2$), eli $\overline{y} \in A$



Kuva 5: Avoin joukko

Sisältö:
Vektoriavaruudet
$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$
Geometrinen havainnollistus
Tason topologiaa

Etusivu
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Sivu 14 / 21
Takaisin
Koko näyttö
Lopeta

2. Jos $y_1 < x_1$, niin

$$\begin{aligned} & |\, y_1 - x_1 \,| & \leq & \ \tfrac{x_1-2}{20} \\ \Longleftrightarrow \quad & x_1 - \tfrac{x_1-2}{20} & \leq & \ y_1 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2 + (x_1 - 2) - \tfrac{x_1-2}{20} & \leq & \ y_1 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2 + [1 - \tfrac{1}{20}] \cdot (x_1 - 2) & \leq & \ y_1 \\ \Rightarrow \quad & 2 & < & \ y_1, \end{aligned}$$

eli taas $\overline{y} \in A$.

Lause 1.8 Avoin pallo on aina avoin joukko. Avoin suorakulmio

$$\{\overline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid a < x_1 < b, c < x_2 < d\}$$

on avoin joukko.

Tässä $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a < b, c < d$. Katso kuva 6.

Määritelmä 1.9 Joukko $A \subset \mathbf{R}^2$ on *suljettu*, jos (komplementti) $\mathbf{R}^2 \setminus A$ on avoin. Katso kuva 7.

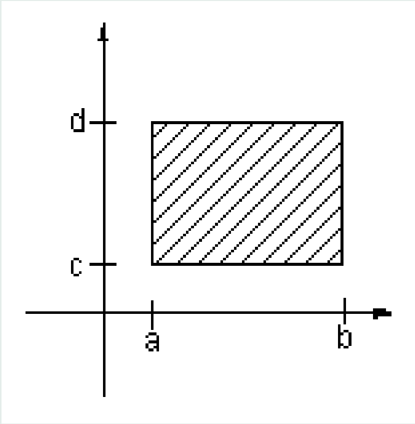
Esimerkki

Jana

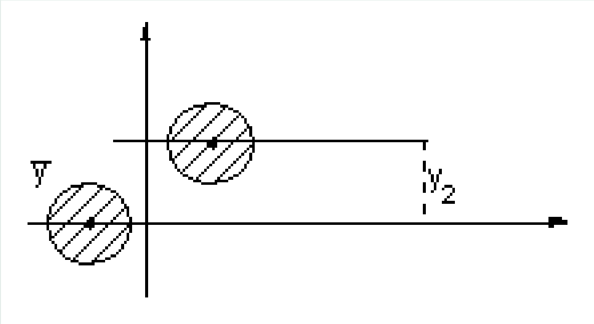
$$\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 10\} =: A$$

on suljettu. Merkitään $B := \mathbf{R}^2 \setminus A$. Joukko B sisältää kahdenlaisia pisteitä $\overline{y} := (y_1, y_2)$:

1) $y_2 \neq 0$



Kuva 6: Avoin suorakulmio



Kuva 7: Suljettu joukko

2) $y_2 = 0$, mutta $y_1 \notin [0, 10]$.

Todistetaan, että joukko B on avoin. Olkoon $\overline{y} \in B$.

Tapaus 1° Valitaan esimerkiksi $r = \frac{|y_2|}{2}$. Tällöin $B(\overline{y}, r) \subset B$.

Tapaus 2° Pätee $y_1 < 0 \bigvee y_1 > 10$. Jos $y_1 < 0$, valitaan $r = \frac{|y_1|}{2}$ mistä seuraa $B(\overline{y}, r) \subset B$. Jos $y_1 > 10$, valitaan $r = \frac{y_1 - 10}{2}$ mistä seuraa $B(\overline{y}, r) \subset B$.

Esimerkki Joukko

$$A := \{(x, 0) \mid 0 < x < 10\}$$

ei ole avoin eikä suljettu.

Selitys. Joukko A ei ole avoin, koska jos valitaan $\overline{x} = (5, 0)$ ja $r > 0$ mielivaltainen, niin $B(x, r) \not\subset A$. Joukko A ei ole suljettu koska jos merkitään $B = \mathbf{R}^2 \setminus A$, piste $(0, 0) \in B$. Nyt B ei ole avoin. Olkoon $r > 0$ mielivaltainen. Joukko $B(0, r)$ sisältää A:n pisteitä $B(0, r) \not\subset B$ joten B ei ole avoin. Näin ollen A ei ole suljettu.

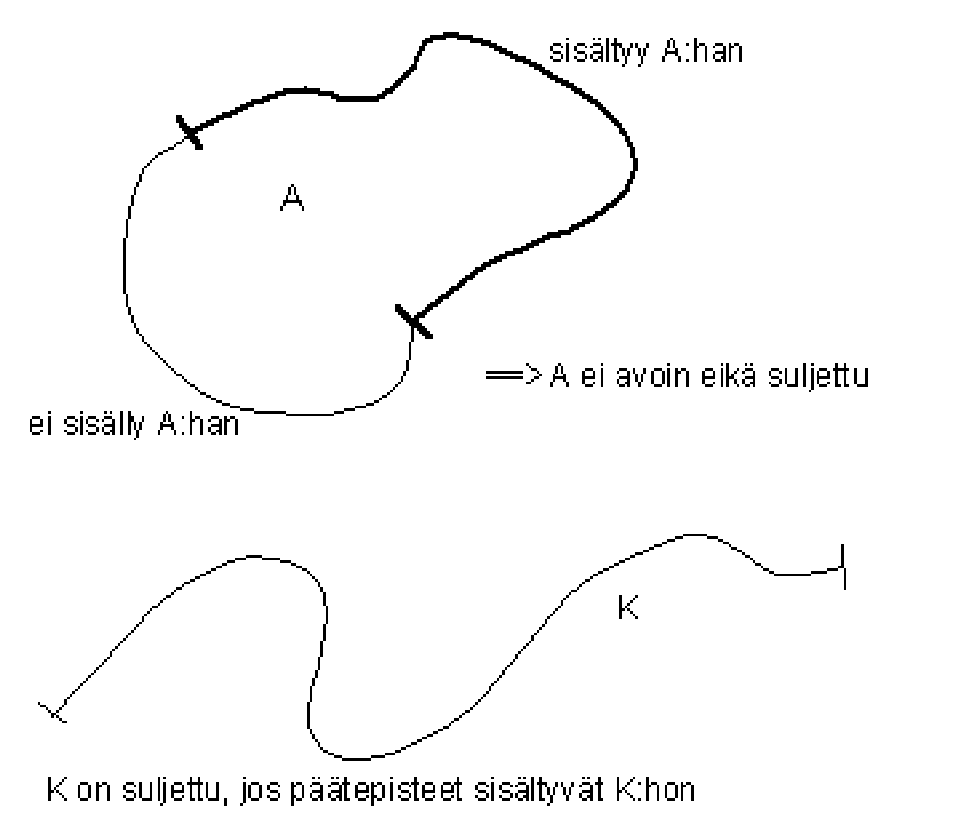
Heuristisesti: Katso kuva 8.

Esimerkki Olkoon

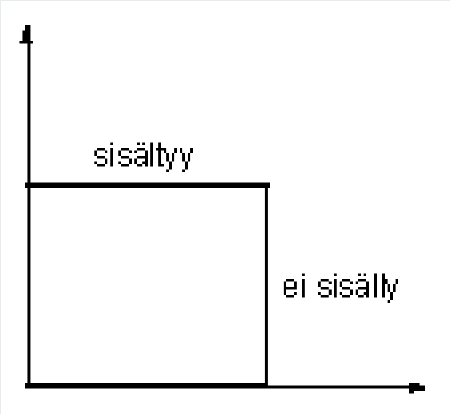
$$A := \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 < x_2 < 1\right\}.$$

Joukko A ei ole avoin eikä suljettu. Katso kuva 9.

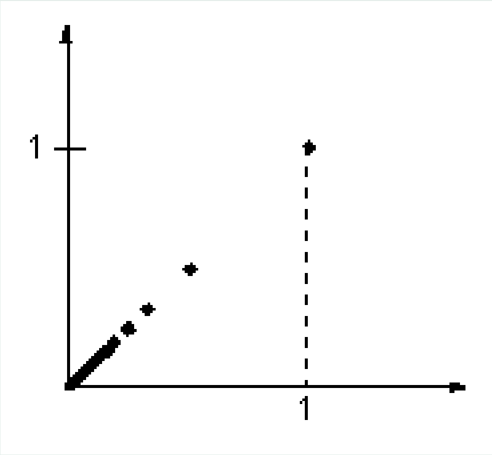
Määritelmä 1.10 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Piste $\overline{x}$ on joukon A *kasaantumispiste*, jos jokainen $\overline{x}$:n ympäristö sisältää vähintään yhden A:n pisteen $\overline{y}$, $\overline{y} \neq \overline{x}$.



Kuva 8: Joukot A ja K



Kuva 9: Joukko A



Kuva 10: Kasaantumispiste

Esimerkki Olkoon

$$A := \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \mid k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Piste $\overline{0}$ on A:n kasaantumispiste. Katso kuva 10.

Lause 1.11 Jos $\overline{x}$ on A:n kasaantumispiste, niin jokainen $B(\overline{x}, r)$ sisältää äärettömän monta A:n pistettä. Lisäksi on olemassa jono $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty} \subset A$ siten, että $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}$.

Määritelmä 1.12 Joukon A sulkeuma on joukko

$$\overline{A} := \{\overline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \overline{x} \in A \text{ tai } \overline{x} \text{ on } A\text{:n kasaantumispiste}\}.$$

Lause 1.13 Jos $A \subset \mathbf{R}^2$, niin $\overline{A}$ on suljettu joukko. Jos B on suljettu joukko, niin $\overline{B} = B$.

Seuraus A on suljettu, jos ja vain jos A sisältää kaikki kasaantumispisteensä.

Esimerkki Joukko

$$B := \left\{ \left(1, 3 + \frac{1}{k}\right) \mid k \in \mathbf{N} \right\}$$

ei ole suljettu. Joukko

$$C := B \cup \{(1,3)\}$$

on suljettu.

Määritelmä 1.14 Piste $\overline{x}$ on joukon A *sisäpiste* jos on olemassa ympäristö $B(\overline{x}, r)$, $r > 0$ siten, että $B(\overline{x}, r) \subset A$.

Piste $\overline{x}$ on joukon A ulkopiste, jos $\overline{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus A$ ja on olemassa $s > 0$ siten, että $B(\overline{x}, s) \subset \mathbf{R}^2 \setminus A$.

Piste $\overline{x}$ on joukon A reunapiste, jos sen jokainen ympäristö $B(\overline{x}, r)$, $r > 0$ sisältää sekä A:n että $\mathbf{R}^2 \setminus A$:n pisteitä.

Esimerkki Olkoon joukko

$$C := \{(x, y) \mid 1 < x \leq 3, 2 < y \leq 4\}$$

Piste $(1 + \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{1000}) \in C$ on sisäpiste, $(2, 4) \in C$ ei ole sisäpiste.

Piste $(3\frac{1}{2}, 3)$ on joukon C ulkopiste, $(2, 2) \in \mathbf{R}^2 \setminus C$ ei ole ulkopiste.

Pisteet $(2, 2)$ ja $(2, 4)$ ovat joukon C reunapisteitä.

Todistus. Tapaus $(2,2)$: Olkoon $r > 0$ mielivaltainen.

$1°$ Joukko $B((2,2),r)$ sisältää C:n pisteitä: määritellään $r' = \min(1,r)$ ja $\bar{b} = (2, 2 + \frac{r'}{2})$. Tällöin $\bar{b} \in B((2,2),r)$;

$$\left| (2,2) - \bar{b} \right| = \left| (2,2) - \left(2, 2 + \frac{r'}{2}\right) \right| = \left| \left(0, \frac{r'}{2}\right) \right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{r'}{2}\right)^2} = \frac{r'}{2} \leq \frac{r}{2}$$

Toisaalta $\bar{b} \in C$, koska $\bar{b} = \left(2, 2 + \frac{r'}{2}\right)$.

$2°$ Joukko $B((2,2),r)$ sisältää joukon $\mathbf{R}^2 \setminus C$ pisteitä, esimerkiksi

$$\bar{c} = \left(2, 2 - \frac{r}{2}\right) \in \left(\mathbf{R}^2 \setminus C\right) \cap B((2,2),r).$$

Todistus harjoitustehtävä. $\square$

Joukon A reuna on se joukko

$$\partial A := \{\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \bar{x} \text{ on } A\text{:n reunapiste}\}.$$

Jos $\bar{x} \notin A$, niin $\bar{x}$ on joukon A reunapiste jos ja vain jos $\bar{x}$ on joukon A kasaantumispiste.

Seuraus: $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Joukko A on suljettu jos ja vain jos se sisältää kaikki reunapisteensä.