Analyysi II

Jari Taskinen

22. maaliskuuta 2002

Luku 2

Sisältö

2 Useamman muuttujan funktiot

Olkoon $m, n \in \mathbf{N}$, $A \subset \mathbf{R}^m$. Funktiota $f : A \to \mathbf{R}$ sanotaan m:n muuttujan reaalifunktioksi.

Funktio $f : A \to \mathbf{R}^n$ on m:n muuttujan vektoriarvoinen tai $\mathbf{R}^n$-arvoinen funktio. (Jos $m = n \geq 2$, niin f on vektorikenttä.)

Esimerkki 1 Kahden muuttujan reaaliarvoisia funktioita:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sin(x,y) \\
f(x,y) &= x^2 + 3x^2y - y^3 \\
g(x,y) &= \tfrac{1}{x^2+y^2} - \tfrac{1}{y} \\
h(x,y) &= \tan x_1 \cdot \sin x_2 \\
h(\overline{x}) &= |\,\overline{x}\,| + 3\,|\,\overline{x}\,|^2 \\
g(x_1,x_2) &= \begin{cases} 1, & x_1 \geq x_2 \\ \sin x_1, & x_1 < x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

missä $x, y \in \mathbf{R}$ ja $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2 Kahden muuttujan $\mathbf{R}^2$-arvoisia funktioita:

$$f : A \to \mathbf{R}^2, \quad f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x})) = f_1(\overline{x})\overline{i} + f_2(\overline{x})\overline{j},$$

missä $f_1 : A \to \mathbf{R}$, $f_2 : A \to \mathbf{R}$ ja $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x^2 + y^2, \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y}); x, y \in \mathbf{R} \quad x, y \neq 0 \\
g(x_1,x_2) &= (\sin x_1 + \cos x_2, \sin x_2 - \cos x_1).
\end{aligned}$$

Esimerkki 3 Kahden muuttujan $\mathbf{R}^3$-arvoisia funktioita:

$$f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), f_3(\overline{x}))\,, \overline{x} \in A \subset \mathbf{R}^2, f_j : A \to \mathbf{R}, j = 1, 2, 3, \ldots$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= (2x + y, 3y^2, 2x^2) \\
f(\overline{x}) &= (\sin x_1, \cos(x_1 + x_2), \tan x_2).
\end{aligned}$$

Yleisesti: Funktio $f : A \to \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^m$ on muotoa

$$f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \ldots, f_n(\overline{x}))\,,$$

missä $\overline{x} \in A \subset \mathbf{R}^m$, ja $f_j : A \to \mathbf{R}$ on funktion f j:s komponenttifunktio.

Esimerkki 1 Ratkaise yhtälö

$$f(\overline{x}) = 0, \text{ kun } f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = x_3 + x_1^2 - 3x_2^3$$

siis yhtälö

$$x_3 + x_1^2 - 3x_2^3 = 0 \iff x_3 = 3x_2^3 - x_1^2 \text{ (pinta } \mathbf{R}^3\text{:ssa)}$$

Ratkaisu on pinta!

Esimerkki 2 Ratkaise yhtälö

$$g(\overline{x}) = (1, 2, 0), \quad g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \quad g(\overline{x}) = (x_1 + x_2^2, x_2^2, x_1)$$

Yhtälöt:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2^2 & = & 1 \\ & & x_2^3 & = & 2 \\ x_1 & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_2^3 & = & 2 \\ x_2 & = & 2 \\ x_1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & \sqrt[3]{2} \\ x_2 & = & \pm 1 \end{array}\right.$$

Ei ratkaisua.

Määritelmä 2.1 a) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ siten, että $B'(\overline{a}, r) \subset A$. Luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion $f : A \to \mathbf{R}$ raja-arvo pisteessä $\overline{a}$, jos jokaista $r > 0$ kohti voidaan löytää $s > 0$ siten, että

$$|\, f(\overline{x}) - b \,| < r,$$

jos $|\, \overline{x} - \overline{a} \,| < s$, $\overline{x} \neq \overline{a}$. Merkitään

$$b = \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}).$$

Määritelmä 2.1 b) Olkoon joukko $B \subset \mathbf{R}^2$ ja piste $\overline{a}$ joukon B kasaantumispiste. Luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion $g : B \to \mathbf{R}$ raja-arvo pisteessä $\overline{a}$ joukossa B, jos jokaista $r > 0$ vastaa $s > 0$ siten, että

$$|\, g(\overline{x}) - b \,| < r,$$

kun $\overline{x} \in B$ ja $|\, \overline{x} - \overline{a} \,| < s$, $\overline{x} \neq \overline{a}$. Merkitään

$$b = \lim_{\substack{\overline{x} \to \overline{a} \\ \overline{x} \in B}} f(\overline{x}).$$

Esimerkki Olkoon funktio

$$f(x, y) := \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

määritelty joukossa $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mikä on funktion f raja-arvo pisteessä 0? Vastaus: 0.

Todistus. Olkoon $r > 0$. Arvioidaan lauseketta

$$| f(\overline{x}) - b | = | f(\overline{x}) | .$$

On näytettävä, että tämä on pienempi kuin r, kunhan $\overline{x}$ on riittävän lähellä origoa. Arvioidaan

$$| f(\overline{x}) | = \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = (x^2+y^2) = | \overline{x} |^2 \tag{1}$$

Valitaan $s = \min\left(\frac{r}{2}, 1\right)$. Olkoon $| \overline{x} - \overline{a} | < s$ eli $| \overline{x} | < s$. Silloin

$$\left| \overline{x}^2 \right| = | \overline{x} | \cdot | \overline{x} | \leq | \overline{x} | < s \leq \frac{r}{2}$$

□

Esimerkki* Määritellään funktio

$$f(x,y) = \frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Jos $x = y^2$, niin

$$f(x,y) = \frac{(y^2-y^2)^2}{y^4+y^4} = 0.$$

Jos $y = kx$, $k \in \mathbf{R}$, niin

$$f(x,y) = \frac{k^4x^4 - 2k^2x^3 + x^2}{k^4x^4+x^2} = \frac{1+k^4x^2-2k^2x}{1+k^2x^2} \longrightarrow 1,$$

kun $x \to 0$.

Lause 2.2 Olkoon $\overline{a}$ joukon A kasaantumispiste, sekä joukko $B \subset A$ ja oletetaan, että $\overline{a}$ on myös joukon B kasaantumispiste. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$. Jos on olemassa luku $b \in \mathbf{R}$ siten, että

$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in A}} f(\overline{x}) = b,$$

niin pätee myös

$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in B}} f(\overline{x}) = b.$$

Esimerkki Raja-arvon laskeminen käyriä pitkin. Olkoon $g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ ja tarkastellaan raja-arvoa joukossa $A \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, eli lauseketta

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{0}, \overline{x}\in A} g(\overline{x}) \tag{2}$$

a) $A := \{(t, kt) \mid t \in \mathbf{R}, t > 0\}$ (k kiinteä). Silloin

$$(2) = \lim_{t \to 0+} g(t, kt)$$

(katso esimerkki* sivu 4).

b) $A := \{(t^2, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ Silloin

$$(2) = \lim_{t \to 0} g(t^2, t).$$

Esimerkki Olkoon funktio

$$g(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}.$$

Nyt

$$\lim_{\substack{\overline{x} \to \overline{0} \\ \overline{x} \to A}} g(\overline{x}) = \lim_{t \to 0} g(t^2, t) = \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 - t^2)^2}{t^4 + t^4} = 0.$$

Huomautus! Lauseen 2.2 (4) seurauksena funktiolla

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}$$

ei ole raja-arvoa pisteessä $\overline{0}$.

Määritelmä 2.3 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $\overline{a} \in \mathbf{R}^n$ siten, että $B'(\overline{a}, r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Funktiolla $f : A \to \mathbf{R}^m$ on raja-arvo $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ pisteessä $\overline{a}$ jos jokaista $r > 0$ vastaa $s > 0$ siten, että

$$\left| f(\overline{x}) - \overline{b} \right| < r, \text{ kun } |\, \overline{x} - \overline{a} \,| < s, \quad \overline{x} \in A, \overline{x} \neq \overline{a}.$$

Vastaavasti määritellään raja-arvo joukossa A, jos piste $\overline{a}$ on joukon A kasaantumispiste.

Lause 2.4 Olkoon $A, \overline{a}, \overline{b}, f := \{f_1, \ldots, f_m\}$, kuten Määritelmässä 2.3 (sivu 5). Piste $\overline{b}$ on funktion f raja-arvo pisteessä $\overline{a}$, jos ja vain jos

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f_k(\overline{x}) = b_k, \quad 1 \le k \le m.$$

Todistus. Oletetaan

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = \overline{b}. \tag{3}$$

Olkoon $k \in \{1, \ldots, m\}$. On osoitettava että

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f_k(\overline{x}) = \overline{b}_k.$$

Olkoon $r > 0$. On löydettävä $s > 0$ siten, että $|\, f_k(\overline{x}) - b_k \,| < r$, kun $|\, \overline{x} - \overline{a} \,| < s$. Koska (3) pätee, niin on olemassa $s > 0$ siten, että $\left|\, f(\overline{x}) - \overline{b} \,\right| < r$, kun $|\, \overline{x} - \overline{a} \,| < s$. Tällöin

$$|\, f_k(\overline{x}) - b_k \,| = \sqrt{|\, f_k(\overline{x}) - b_k \,|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |\, f_j(\overline{x}) - b_j \,|^2} = \left|\, f(\overline{x}) - \overline{b} \,\right| < r.$$

Oletetaan toisaalta, että

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f_k(\overline{x}) = b_k \tag{4}$$

pätee kaikille k. Olkoon $r > 0$. Valitaan $s_k > 0$ siten, että $|\, f_k(\overline{x}) - b_k \,| < \frac{r}{m}$, kun $|\, \overline{x} - \overline{a} \,| < s_k$. Valitaan $s = \min_{1 \leq k \leq m} s_k$. Jos $|\, \overline{x} - \overline{a} \,| < s$, niin

$$\left|\, f(\overline{x}) - \overline{b} \,\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |\, f_k(\overline{x}) - b_k \,|^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |\, f_k(\overline{x}) - b_k \,| < \sum_{k=1}^{m} \frac{r}{m} = m\frac{r}{m} = r.$$

□

Esimerkki Olkoon joukko $A = \mathbf{R} \setminus \{(0,1,0)\}$, $m = 2$, ja

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_1 + \sin(x_2 x_3), \tfrac{x_1^4 (x_2-1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2}\right) \\ f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + \sin(x_2 x_3) \quad (A \to \mathbf{R}) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= \tfrac{x_1^4 (x_2-1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2} \quad (A \to \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Tässä f_1 ja f_2 ovat kuvauksia $A \to \mathbf{R}$. Laske $\lim_{\overline{x} \to (0,1,0)} f(\overline{x})$.

Lauseen 2.4 (sivu 5) mukaan on syytä tarkastella komponenttifunktioita erikseen:

$$\lim_{\overline{x} \to (0,1,0)} f_1(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\overline{x} \to (0,1,0)} x_1 + \sin(x_2 x_3) = 0 + \sin 0 = 0.$$

Voidaan olettaa, että $|\, x_1 \,| \leq 1$, $|\, x_2 - 1 \,| \leq 1$ ja $|\, x_3 \,| \leq 1$. Tästä seuraa

$$\left|\, x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4 \,\right| = |\, x_1 \,|^4 \,|\, x_2 - 1 \,|^4 \,|\, x_3 \,|^4 \leq |\, x_1 \,|^2 \,|\, x_2 - 1 \,|^2 \,|\, x_3 \,|^2 \leq (x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2))^3.$$

Siis,

$$\begin{aligned} \left|\, \tfrac{x_1^4 (x_2-1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2} \,\right| &\leq \left|\, \tfrac{(x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2))^3}{x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2} \,\right| = (x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2))^2 \\ &= |\, \overline{x} - (0,1,0) \,|^4 \to 0, \end{aligned}$$

kun $\overline{x} \to (0,1,0)$, eli $|\, \overline{x} - (0,1,0) \,| \to 0$. Näin ollen

$$\lim_{\overline{x} \to (0,1,0)} f(\overline{x}) = 0$$

Lause 2.5 Oletetaan, että kuvauksille $f, g : A \to \mathbf{R}^n$ pätee

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = \overline{b}, \quad \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = \overline{c}.$$

Tällöin

a) $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} (f(\overline{x}) + g(\overline{x})) = \lim f(\overline{x}) + \lim(\overline{x})$

b) Jos $\lambda \in \mathbf{R}$, niin $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} (\lambda f(\overline{x})) = \lambda \lim f(\overline{x})$

c) $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} (f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x})) = \overline{b} \cdot \overline{c}$ (jos $n = 1$, niin tavallinen tulo).

d) Jos $n = 1$, $g(\overline{x}) \neq 0$ niin $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{b}{c}$.

Määritelmä 2.6 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^m$ ja $f : A \to \mathbf{R}^n$. Sanotaan, että funktio f on jatkuva pisteessä $\overline{a} \in A$, jos annetulle mielivaltaiselle $r > 0$ voidaan löytää $s > 0$ seuraavasti:

$$|\,f(\overline{x}) - f(\overline{a})\,| < r, \text{ kun } |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < s, \overline{x} \in A.$$

Funktio f on jatkuva joukossa A jos se on jatkuva jokaisessa joukon A pisteessä.

Esimerkki 1 Funktio $f(x, y) = x^2 + 3yx + y^{10}$, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on jatkuva. Yleisesti n:n muuttujan reaaliarvoinen polynomi on jatkuva.

Esimerkki 2 Funktio

$$g := \frac{3xy + y + \pi x^2}{x^2 - y^2}, \quad g : A \to \mathbf{R}, \quad A = \{(x, y) \mid x^2 \neq y^2\}$$

on jatkuva joukossa A.

Lause 2.7 Kuvaus $f = (f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbf{R}^n$ on jatkuva pisteessä $\overline{a}$ jos ja vain jos $f_k : A \to \mathbf{R}$ on jatkuva pisteessä $\overline{a}$ kaikilla $k = 1, \ldots, n$.

Esimerkki Olkoon funktio $f(x, y, z) = (x^2z^2, y + 3z)$. Tässä $f_1(x, y, z) = x^2z^2$ on jatkuva ja $f_2(x, y, z) = y + 3z$ on jatkuva, joten funktio f on jatkuva $\mathbf{R}$:ssä.

Analogisesti Lauseen 2.5 (sivu 7) kanssa, kahden jatkuvan funktion summa, skalaaritulo, jne. . . ovat jatkuvia.

Huomautus Olkoot $f : A \to B$, $g : B \to C$, missä A, B, C ovat joukkoja:

$$g \circ f(x) := g\,(f(x))\,,$$

kun $x \in A$. Siis $g \circ f : A \to C$.

Lause 2.8 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$, $B \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}^n$ siten, että $f(A) \subset B$ ja $g : B \to \mathbf{R}^k$. Oletetaan edelleen että joukko B on avoin, piste $\overline{a} \in A$, funktio f on jatkuva pisteessä $\overline{a}$ ja funktio g on jatkuva pisteessä $f(\overline{a})$. Silloin funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä $\overline{a}$.

Esimerkki 1 Määritellään funktio $f(x,y) = (x^2, y)$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Se on jatkuva ja sen iteraateille pätee

$$
\begin{aligned}
f^2(x,y) &= f \circ f(x,y) = f(x^2,y) = (x^4,y) \\
f^3(x,y) &= f \circ f \circ f(x,y) = f(f^2(x^2,y)) = f(x^4,y) = (x^8,y) \\
&\vdots \\
f^n(x,y) &= \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n kappaletta}} (x,y)
\end{aligned}
$$

Kaikki nämä ovat jatkuvia.

Esimerkki 2 Määritellään funktio $f(x,y) = (y, x^2)$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ joka on jatkuva.

$$
\begin{aligned}
f^2(x,y) &= f(y,x^2) = (x^2,y^2) \\
f^3(x,y) &= f(f^2(x,y)) = f(x^2,y^2) = (y^2,x^4) \\
f^4(x,y) &= \ldots = (x^4,y^4) \text{ jne}\ldots
\end{aligned}
$$