

Analyysi II

Jari Taskinen

21. huhtikuuta 2002

Luku 2

Sisältö

2 Useamman muuttujan funktiot

2

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Sivu 1 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

2. Useamman muuttujan funktiot

Useamman muuttujan funktiot

Olkoon $m, n \in \mathbf{N}$, $A \subset \mathbf{R}^m$. Funktiota $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ sanotaan m :n muuttujan reaali-funktioksi.

Funktio $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ on m :n muuttujan vektoriarvoinen tai \mathbf{R}^n -arvoinen funktio. (Jos $m = n \geq 2$, niin f on vektorikenttä.)

Esimerkki 1 Kahden muuttujan reaaliarvoisia funktioita:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x, y) \\ f(x, y) &= x^2 + 3x^2y - y^3 \\ g(x, y) &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \\ h(x, y) &= \tan x_1 \cdot \sin x_2 \\ h(\bar{x}) &= |\bar{x}| + 3|\bar{x}|^2 \\ g(x_1, x_2) &= \begin{cases} 1, & x_1 \geq x_2 \\ \sin x_1, & x_1 < x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

missä $x, y \in \mathbf{R}$ ja $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2 Kahden muuttujan \mathbf{R}^2 -arvoisia funktioita:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x})) = f_1(\bar{x})\bar{i} + f_2(\bar{x})\bar{j},$$

missä $f_1 : A \rightarrow \mathbf{R}$, $f_2 : A \rightarrow \mathbf{R}$ ja $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}); x, y \in \mathbf{R} \quad x, y \neq 0 \\ g(x_1, x_2) &= (\sin x_1 + \cos x_2, \sin x_2 - \cos x_1). \end{aligned}$$

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 2 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki 3 Kahden muuttujan \mathbf{R}^3 -arvoisia funktioita:

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x})), \bar{x} \in A \subset \mathbf{R}^2, f_j : A \rightarrow \mathbf{R}, j = 1, 2, 3, \dots$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (2x + y, 3y^2, 2x^2) \\ f(\bar{x}) &= (\sin x_1, \cos(x_1 + x_2), \tan x_2). \end{aligned}$$

Yleisesti: Funktio $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^m$ on muotoa

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})),$$

missä $\bar{x} \in A \subset \mathbf{R}^m$, ja $f_j : A \rightarrow \mathbf{R}$ on funktion f j :s komponenttifunktio.

Esimerkki 1 Ratkaise yhtälö

$$f(\bar{x}) = 0, \text{ kun } f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1^2 - 3x_2^3$$

siis yhtälö

$$x_3 + x_1^2 - 3x_2^3 = 0 \iff x_3 = 3x_2^3 - x_1^2 \text{ (pinta } \mathbf{R}^3\text{:ssa)}$$

Ratkaisu on pinta!

Esimerkki 2 Ratkaise yhtälö

$$g(\bar{x}) = (1, 2, 0), \quad g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad g(\bar{x}) = (x_1 + x_2^2, x_2^2, x_1)$$

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 3 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Yhtälöt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 = 1 \\ x_2^3 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2^3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt[3]{2} \\ x_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Ei ratkaisua.

Määritelmä 2.1 a) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $\bar{a} \in \mathbf{R}^2$ siten, että $B'(\bar{a}, r) \subset A$. Luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ raja-arvo pisteessä \bar{a} , jos jokaista $r > 0$ kohti voidaan löytää $s > 0$ siten, että

$$|f(\bar{x}) - b| < r,$$

jos $|\bar{x} - \bar{a}| < s$, $\bar{x} \neq \bar{a}$. Merkitään

$$b = \lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \in A}} f(\bar{x}).$$

Määritelmä 2.1 b) Olkoon joukko $B \subset \mathbf{R}^2$ ja piste \bar{a} joukon B kasaantumispiste. Luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion $g : B \rightarrow \mathbf{R}$ raja-arvo pisteessä \bar{a} joukossa B , jos jokaista $r > 0$ vastaa $s > 0$ siten, että

$$|g(\bar{x}) - b| < r,$$

kun $\bar{x} \in B$ ja $|\bar{x} - \bar{a}| < s$, $\bar{x} \neq \bar{a}$. Merkitään

$$b = \lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \in B}} f(\bar{x}).$$

Esimerkki Olkoon funktio

$$f(x, y) := \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 4 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

määritelty joukossa $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mikä on funktion f raja-arvo pisteessä 0? Vastaus: 0.

Todistus. Olkoon $r > 0$. Arvioidaan lauseketta

$$|f(\bar{x}) - b| = |f(\bar{x})|.$$

On näytettävä, että tämä on pienempi kuin r , kunhan \bar{x} on riittävän lähellä origoa. Arvioidaan

$$|f(\bar{x})| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2) = |\bar{x}|^2 \quad (1)$$

Valitaan $s = \min\left(\frac{r}{2}, 1\right)$. Olkoon $|\bar{x} - \bar{a}| < s$ eli $|\bar{x}| < s$. Silloin

$$|\bar{x}^2| = |\bar{x}| \cdot |\bar{x}| \leq |\bar{x}| < s \leq \frac{r}{2}$$

□

Esimerkki* Määritellään funktio

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Jos $x = y^2$, niin

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - y^2)^2}{y^4 + y^4} = 0.$$

Jos $y = kx$, $k \in \mathbf{R}$, niin

$$f(x, y) = \frac{k^4 x^4 - 2k^2 x^3 + x^2}{k^4 x^4 + x^2} = \frac{1 + k^4 x^2 - 2k^2 x}{1 + k^2 x^2} \longrightarrow 1,$$

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 5 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

kun $x \rightarrow 0$.

Lause 2.2 Olkoon \bar{a} joukon A kasaantumispiste, sekä joukko $B \subset A$ ja oletetaan, että \bar{a} on myös joukon B kasaantumispiste. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Jos on olemassa luku $b \in \mathbf{R}$ siten, että

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \in A}} f(\bar{x}) = b,$$

niin pätee myös

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \in B}} f(\bar{x}) = b.$$

Esimerkki Raja-arvon laskeminen käyriä pitkin. Olkoon $g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ ja tarkastellaan raja-arvoa joukossa $A \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, eli lauseketta

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}, \bar{x} \in A} g(\bar{x}) \tag{2}$$

a) $A := \{(t, kt) \mid t \in \mathbf{R}, t > 0\}$ (k kiinteä). Silloin

$$(2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, kt)$$

(katso esimerkki* sivu 5).

b) $A := \{(t^2, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ Silloin

$$(2) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t^2, t).$$

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 6 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki Olkoon funktio

$$g(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}.$$

Nyt

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{0} \\ \bar{x} \rightarrow A}} g(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 - t^2)^2}{t^4 + t^4} = 0.$$

Huomautus! Lauseen 2.2 (6) seurauksena funktiolla

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}$$

ei ole raja-arvoa pisteessä $\bar{0}$.

Määritelmä 2.3 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ siten, että $B'(\bar{a}, r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Funktiolla $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ on raja-arvo $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ pisteessä \bar{a} jos jokaista $r > 0$ vastaa $s > 0$ siten, että

$$|f(\bar{x}) - \bar{b}| < r, \text{ kun } |\bar{x} - \bar{a}| < s, \quad \bar{x} \in A, \bar{x} \neq \bar{a}.$$

Vastaavasti määritellään raja-arvo joukossa A , jos piste \bar{a} on joukon A kasaantumispiste.

Lause 2.4 Olkoon $A, \bar{a}, \bar{b}, f := \{f_1, \dots, f_m\}$, kuten Määritelmässä 2.3 (sivu 7). Piste \bar{b} on funktion f raja-arvo pisteessä \bar{a} , jos ja vain jos

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = b_k, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 7 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Todistus. Oletetaan

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}. \quad (3)$$

Olkoon $k \in \{1, \dots, m\}$. On osoitettava että

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = \bar{b}_k.$$

Olkoon $r > 0$. On löydettävä $s > 0$ siten, että $|f_k(\bar{x}) - b_k| < r$, kun $|\bar{x} - \bar{a}| < s$. Koska (3) pätee, niin on olemassa $s > 0$ siten, että $|f(\bar{x}) - \bar{b}| < r$, kun $|\bar{x} - \bar{a}| < s$. Tällöin

$$|f_k(\bar{x}) - b_k| = \sqrt{|f_k(\bar{x}) - b_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m |f_j(\bar{x}) - b_j|^2} = |f(\bar{x}) - \bar{b}| < r.$$

Oletetaan toisaalta, että

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = b_k \quad (4)$$

pätee kaikille k . Olkoon $r > 0$. Valitaan $s_k > 0$ siten, että $|f_k(\bar{x}) - b_k| < \frac{r}{m}$, kun $|\bar{x} - \bar{a}| < s_k$. Valitaan $s = \min_{1 \leq k \leq m} s_k$. Jos $|\bar{x} - \bar{a}| < s$, niin

$$|f(\bar{x}) - \bar{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^m |f_k(\bar{x}) - b_k|^2} \leq \sum_{k=1}^m |f_k(\bar{x}) - b_k| < \sum_{k=1}^m \frac{r}{m} = m \frac{r}{m} = r.$$

□

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 8 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki Olkoon joukko $A = \mathbf{R} \setminus \{(0, 1, 0)\}$, $m = 2$, ja

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_1 + \sin(x_2 x_3), \frac{x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2} \right) \\f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + \sin(x_2 x_3) \quad (A \rightarrow \mathbf{R}) \\f_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2} \quad (A \rightarrow \mathbf{R}).\end{aligned}$$

Tässä f_1 ja f_2 ovat kuvauksia $A \rightarrow \mathbf{R}$. Laske $\lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} f(\bar{x})$.

Lauseen 2.4 (sivu 7) mukaan on syytä tarkastella komponenttifunktioita erikseen:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} f_1(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} x_1 + \sin(x_2 x_3) = 0 + \sin 0 = 0.$$

Voidaan olettaa, että $|x_1| \leq 1$, $|x_2 - 1| \leq 1$ ja $|x_3| \leq 1$. Tästä seuraa

$$|x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4| = |x_1|^4 |x_2 - 1|^4 |x_3|^4 \leq |x_1|^2 |x_2 - 1|^2 |x_3|^2 \leq (x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2)^3.$$

Siis,

$$\begin{aligned}\left| \frac{x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2} \right| &\leq \left| \frac{(x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2)^3}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2} \right| = (x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2)^2 \\&= |\bar{x} - (0, 1, 0)|^4 \rightarrow 0,\end{aligned}$$

kun $\bar{x} \rightarrow (0, 1, 0)$, eli $|\bar{x} - (0, 1, 0)| \rightarrow 0$. Näin ollen

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} f(\bar{x}) = 0$$

Lause 2.5 Oletetaan, että kuvauksille $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ pätee

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}, \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x}) = \bar{c}.$$

Tällöin

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 9 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

- a) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x}) + g(\bar{x})) = \lim f(\bar{x}) + \lim g(\bar{x})$
- b) Jos $\lambda \in \mathbf{R}$, niin $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (\lambda f(\bar{x})) = \lambda \lim f(\bar{x})$
- c) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})) = \bar{b} \cdot \bar{c}$ (jos $n = 1$, niin tavallinen tulo).
- d) Jos $n = 1$, $g(\bar{x}) \neq 0$ niin $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{b}{c}$.

Määritelmä 2.6 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$. Sanotaan, että funktio f on jatkuva pisteessä $\bar{a} \in A$, jos annettulle mielivaltaiselle $r > 0$ voidaan löytää $s > 0$ seuraavasti:

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < r, \text{ kun } |\bar{x} - \bar{a}| < s, \bar{x} \in A.$$

Funktio f on jatkuva joukossa A jos se on jatkuva jokaisessa joukon A pisteessä.

Esimerkki 1 Funktio $f(x, y) = x^2 + 3yx + y^{10}$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva. Yleisesti n :n muuttujan reaaliarvoinen polynomi on jatkuva.

Esimerkki 2 Funktio

$$g := \frac{3xy + y + \pi x^2}{x^2 - y^2}, \quad g : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A = \{(x, y) \mid x^2 \neq y^2\}$$

on jatkuva joukossa A .

Lause 2.7 Kuvaus $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ on jatkuva pisteessä \bar{a} jos ja vain jos $f_k : A \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva pisteessä \bar{a} kaikilla $k = 1, \dots, n$.

Esimerkki Olkoon funktio $f(x, y, z) = (x^2 z^2, y + 3z)$. Tässä $f_1(x, y, z) = x^2 z^2$ on jatkuva ja $f_2(x, y, z) = y + 3z$ on jatkuva, joten funktio f on jatkuva \mathbf{R} :ssä.

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 10 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Analogisesti Lauseen 2.5 (sivu 9) kanssa, kahden jatkuvan funktion summa, skalaaritulo, jne... ovat jatkuvia.

Huomautus Olkoot $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, missä A, B, C ovat joukkoja:

$$g \circ f(x) := g(f(x)),$$

kun $x \in A$. Siis $g \circ f : A \rightarrow C$.

Lause 2.8 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$, $B \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ siten, että $f(A) \subset B$ ja $g : B \rightarrow \mathbf{R}^k$. Oletetaan edelleen että joukko B on avoin, piste $\bar{a} \in A$, funktio f on jatkuva pisteessä \bar{a} ja funktio g on jatkuva pisteessä $f(\bar{a})$. Silloin funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä \bar{a} .

Esimerkki 1 Määritellään funktio $f(x, y) = (x^2, y)$, $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Se on jatkuva ja sen iteraateille pätee

$$f^2(x, y) = f \circ f(x, y) = f(x^2, y) = (x^4, y)$$

$$f^3(x, y) = f \circ f \circ f(x, y) = f(f^2(x, y)) = f(x^4, y) = (x^8, y)$$

\vdots

$$f^n(x, y) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ kappaletta}}(x, y)$$

Kaikki nämä ovat jatkuvia.

Esimerkki 2 Määritellään funktio $f(x, y) = (y, x^2)$, $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ joka on jatkuva.

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 11 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

$$f^2(x, y) = f(y, x^2) = (x^2, y^2)$$

$$f^3(x, y) = f(f^2(x, y)) = f(x^2, y^2) = (y^2, x^4)$$

$$f^4(x, y) = \dots = (x^4, y^4) \text{ jne.}\dots$$

Sisältö:
Useamman
muuttujan funktiot

Etusivu



Sivu 12 / 12

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta