Analyysi II

Jari Taskinen

9. huhtikuuta 2002

Luku 3

Sisältö

3 Differentiaalilaskenta

3.1 Osittaisderivaatta

Määritelmä 3.1 Olkoon $\overline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ ja f reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty ainakin $\overline{a}$:n jossakin ympäristössä. Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

niin tätä sanotaan funktion f osittaisderivaataksi 1. muuttujan suhteen (tai x:n suhteen) pisteessä $\overline{a}$. Merkitään

$$D_1 f(\overline{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}), \quad f_{x_1}(\overline{a}), \quad f'_{x_1}(\overline{a}).$$

Vastaavasti määritellään f:n osittaisderivaatta toisen muuttujan suhteen raja-arvona

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Tätä merkitään

$$D_2 f(\overline{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a}) \text{ jne.}$$

Sanotaan, että funktio f on derivoituva pisteessä $\overline{a}$, jos derivaatat $D_1 f(\overline{a})$ ja $D_2 f(\overline{a})$ ovat olemassa. Jos funktio f on derivoituva joukon A jokaisessa pisteessä, niin f on derivoituva joukossa A.

Esimerkki Olkoon

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{kun } (x, y) = (1, 0) \\ \frac{xy^3}{(x-1)^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (1, 0) \end{cases}$$

Tällöin

$$D_1 f(1, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

ja

$$D_2 f(1, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1, h) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^2 h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Olkoon f kuten yllä. Pitäen muuttujaa y kiinteänä määritellään x:n funktio $g(x) := f(x, y)$. Silloin

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h), y) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Näemme siis, että osittaisderivaatta x:n suhteen voidaan muodostaa tuttuja derivoimissääntöjä käyttäen (pitämällä y vakiona).

Esimerkki Jos

$$f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y,$$

on osittaisderivaatta

$$D_1 f(x,y) = 3y^2x^2 + 4x^3 \sin y.$$

Jos

$$g(x,y) = y^2 + e^{xy},$$

on osittaisderivaatta

$$D_1 g(x,y) = 0 + e^{xy} \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = e^{xy}y.$$

Vastaavasti $\frac{\partial}{\partial y}$ muodostetaan pitämällä x:ää vakiona (f ja g kuten yllä):

$$\begin{aligned} D_2 f(x,y) &= 2x^3y + x^4 \cos y, \\ D_2 g(x,y) &= 2y + xe^{xy}. \end{aligned}$$

Useamman muuttujan funktion osittaisderivaatat

Olkoon funktio g määritelty pisteen $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ympäristössä, ja $j \in \{1, \ldots, n\}$. Raja-arvot

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{g(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - g(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{h}$$

on osittaisderivaatta j:nen muuttujan suhteen, ja sitä merkitään $D_j g(\overline{a})$.

Esimerkki Määritellään funktio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_3 + \sin(x_2 + x_4) + e^{x_1 + x_4}.$$

Sen osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f &= 2x_1x_3 + 0 + e^{x_1+x_4} \cdot \underbrace{D_1(x_1 + x_4)}_{=1} = 2x_1x_3 + e^{x_1+x_4} \\ D_2 f &= 0 + \cos(x_2 + x_4) + 0 = \cos(x_2 + x_4) \\ D_3 f &= x_1^2 \\ D_4 f &= \cos(x_2 + x_4) + e^{x_1+x_4}. \end{aligned}$$

Huomautamme, että derivoituvan funktion ei tarvitse olla jatkuva.

Esimerkki Funktio

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \bigvee y = 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ei ole jatkuva pisteessä $\overline{0} = (0,0)$, mutta

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0, \quad D_2 f(0,0) = 0.$$

3.2 Korkeamman kertaluvun derivaatat

Jos derivaatta $D_j f$ on olemassa pisteen $\overline{a}$ ympäristössä ja $D_j f$ on derivoituva k:nen muuttujan suhteen, saadaan 2. kertaluvun osittaisderivaatta

$$D_{jk} f(\overline{a}) = \Big(D_k(D_j f)\Big)(\overline{a})$$

($j, k \in \{1, \ldots, n\}$, kun f on n:n muuttujan funktio). Merkitään myös

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\overline{a}).$$

Vastaavasti määritellään funktion f korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat

$$D_{jki} f := D_i(D_{jk} f)$$

ja niin edelleen. Sanotaan, että f on m kertaa jatkuvasti derivoituva, jos kaikki enintään kertalukua m olevat osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Esimerkki Funktion

$$f(x,y,z) := x^3 y^2 + x^4 \sin y + \cos(xz)$$

osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f &= 3y^2 x^2 + 4x^3 \sin y - z \sin(xz) \\ D_2 f &= 2x^3 y + x^4 \cos y \\ D_3 f &= -x \sin(xz). \end{aligned}$$

Päteekö $D_{12} = D_{21}$?

$$
\begin{aligned}
D_{11}f &= 6xy^2 + 12x^2 \sin y - z^2 \cos(xz) \\
D_{22}f &= 2x^3 - x^4 \sin y \\
D_{33}f &= -x^2 \cos(xz) \\
D_{12}f &= D_2(D_1 f) = 6x^2 y + 4x^3 \cos y \\
D_{21}f &= D_1(D_2 f) = 6x^2 y + 4x^3 \cos y \\
D_{13}f &= D_3(D_1 f) = -\sin(xz) - xz\cos(xz) \\
D_{31}f &= D_1(D_3 f) = -\sin(xz) - xz\cos(xz) \\
D_{23}f &= 0 \\
D_{32}f &= 0.
\end{aligned}
$$

Esimerkki Määritellään funktio

$$
f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x,y) \neq \overline{0} \\ 0 & \text{kun } (x,y) = \overline{0}. \end{cases}
$$

Kun $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$
\begin{aligned}
D_1 f = D_1\left(\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned} \tag{1}
$$

ja

$$
D_2 f = \ldots = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}. \tag{2}
$$

Tuloksesta (1) seuraa

$$
D_1 f(0, y) = \frac{0 \cdot y^3 + 0 \cdot y - y^5}{(0^2+y^2)^2} = \frac{-y^5}{y^4} = -y, \quad \text{kun } y \neq 0, \tag{3}
$$

ja tuloksesta (2)

$$
D_2 f(x, 0) = \ldots = x, \quad x \neq 0. \tag{4}
$$

Osittaisderivaatat origossa ovat

$$
D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0\cdot(h^2-0^2)}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \tag{5}
$$

ja

$$
D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \ldots = 0. \tag{6}
$$

Nyt tuloksien (3) ja (5) avulla saadaan

$$D_{12}f(0,0) = D_2(D_1 f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1$$

ja tuloksista (4) ja (6)

$$D_{21}f(0,0) = D_1(D_2 f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

On kuitenkin vain erikoistapaus, että osittaisderivaatat saavat eri arvot.

Lause 3.2 Olkoon funktio f reaaliarvoinen kuvaus, joka on määritelty pisteen $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä. Oletetaan, että $D_{12}f$ ja $D_{21}f$ ovat olemassa pisteen (a,b) ympäristössä ja jatkuvia ainakin pisteessä (a,b). Silloin

$$D_{12}f(a,b) = D_{12}f(a,b).$$

Todistus sivuutetaan.

Esimerkki Olkoon

$$f(x,y) = x^2 y + e^{xy}.$$

Osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} D_1 &= 2xy + ye^{xy} \\ D_2 &= x^2 + xe^{xy} \\ D_{21} &= 2x + e^{xy}(1+xy) \\ D_{12} &= 2x + e^{xy}(1+xy) \end{aligned}$$

Olkoon $f = (f_1, \ldots, f_n)$ pisteen $\overline{a} \in \mathbf{R}^m$ ympäristössä määritelty vektoriarvoinen kuvaus. Määritellään funktion f osittaisderivaatta x_j:n suhteen pisteessä $\overline{a}$ raja-arvona

$$D_j f(\overline{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m)}{h}$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Ei ole vaikea osoittaa, että osittaisderivaatta saadaan derivoimalla komponenttifunktiot:

$$D_j f(\overline{a}) = \Big(D_j f_1(\overline{a}), \ldots, D_j f_n(\overline{a})\Big).$$

Esimerkki Olkoon $m = 2$, $n = 3$ ja

$$f(x,y) = \Big(\sin(x+y), x^2, e^{xy}\Big).$$

Osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \big(\cos(x+y), 2x, ye^{xy}\big) \\ D_2 f(x,y) &= \big(\cos(x+y), 0, xe^{xy}\big). \end{aligned}$$

Lause 3.3 Olkoon funktio f määritelty pisteessä $\overline{a} \in \mathbf{R}^m$, reaaliarvoinen. Jos osittaisderivaatat $D_{ij}f$ ja $D_{ji}f$, $i < j$, ovat olemassa pisteen $\overline{a}$ ympäristössä ja jatkuvia pisteessä $\overline{a}$, niin

$$D_{ij}f(\overline{a}) = D_{ji}f(\overline{a}), \quad i,j \in \{1,\dots,m\}.$$

Todistus. Olkoon $\overline{a} = (a_1,\dots,a_m)$. Määritellään

$$g(x,y) := f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_{j-1},y,a_{j+1},\dots,a_m)$$

joka on kahden muuttujan funktio. Funktiolle g pätee: x on määritelty pisteen $\overline{a}' = (a_i,a_j) \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä, $D_1 g$, $D_2 g$ määritelty $\overline{a}'$:n ympäristössä jne. . . Sovelletaan lausetta 3.2 (sivu 6)

$$D_{ij}f(\overline{a}) = D_{12}g(a_i,a_j) = D_{21}g(a_j,a_i) = D_{ji}f(\overline{a}).$$

□

Esimerkki Jos $h : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ ja kaikki osittaisderivaatat kertalukuun 5 asti ovat jatkuvia, niin

$$D_{1234}h = D_{4321}h = D_{1432}h = \dots$$

Mutta tietenkään ei päde esimerkiksi $D_{213}h = D_{223}h$.

3.3 Differentioituvuus

Yhden muuttujan funktio f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$ jos ja vain jos on olemassa $a \in \mathbf{R}$ siten, että

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\varepsilon(h),$$

missä ε on reaalimuuttujan funktio, määritelty 0:n ympäristössä ja $\varepsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Silloin $a = Df(x_0)$.

Tutkitaan samaa asiaa kahden muuttujan funktioille. Olkoon $\overline{a} = (a_1,a_2)$ tarkastelupiste ja oletetaan, että funktio f on määrätty pisteen $\overline{a}$ jossakin ympäristössä U. Oletetaan, että $\overline{h} \in \mathbf{R}$ siten, että $\overline{a} + \overline{h} \in U$.

Määritelmä 3.4 Funktio f on *differentioituva* pisteessä $\overline{a}$, jos on olemassa luvut α_1 ja α_2 siten, että

$$f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \left|\overline{h}\right| \varepsilon(\overline{h}), \tag{7}$$

missä ε on jossain origon ympäristössä V määritelty funktio $V \to \mathbf{R}$ ja $\varepsilon(\overline{h}) \to 0$ kun $\overline{h} \to \overline{0}$. Jos merkitään $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, niin (7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) = \overline{\alpha} \cdot \overline{h} + \left|\overline{h}\right| \varepsilon(\overline{h}).$$

Määritelmä 3.5 Olkoon $A \in \mathbf{R}^2$. Funktio $f : A \to \mathbf{R}$ on differentioituva joukossa A, jos se on differentioituva jokaisessa pisteessä $\overline{a} \in A$.

Lause 3.6 Jos funktio f on differentioituva pisteessä $\overline{a}$, niin se on jatkuva pisteessä $\overline{a}$.

Todistus. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että

$$|\, f(\overline{x}) - f(\overline{a})\,| < s, \text{ kun } |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < r.$$

Olkoon ε kuten kaavassa (7), samoin $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Voidaan löytää s' siten, että $|\,\varepsilon(h)\,| < 1$, kun $\left|\overline{h}\right| < s'$. Valitaan $r = \min\left(s', \frac{s}{|\,\overline{\alpha}\,|+1}\right)$. Olkoon nyt $\overline{x}$ sellainen, että $|\,\overline{x} - \overline{a}\,| < r$. Tällöin (merkitään $\overline{h} = \overline{x} - \overline{a}$)

$$\begin{aligned} |\, f(\overline{x}) - f(\overline{a})\,| &= \left| f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) \right| = \left| \overline{\alpha} \cdot \overline{h} + \left|\overline{h}\right| \varepsilon(\overline{h}) \right| \\ &\le \left| \overline{\alpha} \cdot \overline{h} \right| + \left|\overline{h}\right| \left| \varepsilon(\overline{h}) \right| \le \left|\overline{h}\right| \Big(|\,\overline{\alpha}\,| + \left| \varepsilon(\overline{h}) \right| \Big) \\ &\le |\,\overline{x} - \overline{a}\,| \Big(|\,\overline{\alpha}\,| + 1 \Big) < r\Big(|\,\overline{\alpha}\,| + 1 \Big) \le \tfrac{s}{|\,\overline{\alpha}\,|+1} (|\,\overline{\alpha}\,| + 1) = s. \end{aligned}$$

□

Lause 3.7 Jos funktio f on differentioituva pisteessä $\overline{a}$, niin f on derivoituva ja

$$D_j f(\overline{a}) = \alpha_j, \quad j = 1, 2$$

Todistus. Tapaus $j = 1$.

$$f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \left|\overline{h}\right| \varepsilon(\overline{h}),$$

missä $\varepsilon(\overline{h}) \to 0$ kun $\overline{h} \to 0$. Tämä pätee, kun $\overline{h}$ on jossakin $\overline{0}$:n ympäristössä. Erityisesti voidaan tarkastella tapausta $\overline{h} = (h_1, 0)$, missä $h_1 > 0$. Muodostetaan

$$\begin{aligned} \frac{f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a})}{h_1} &= \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = \frac{\alpha_1 h_1}{h_1} + \frac{\left|\overline{h}\right|}{h_1} \varepsilon(\overline{h}) \\ &= \alpha_1 + \frac{\left|\overline{h}\right|}{h_1} \varepsilon(\overline{h}) \longrightarrow \alpha_1, \end{aligned}$$

kun $\overline{h} \to \overline{0}$. Tämä todistaa, että $D_1 f(\overline{a}) = \alpha_1$, koska osittaisderivaatan määritelmän mukaan on toisaalta

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = D_1 f(\overline{a}).$$

Toinen muuttuja käsitellään vastaavasti. $\square$

Differentioituvuus ja muut edellä mainitut tulokset määritellään ja todistetaan samalla tavalla n:n muuttujan funktioille.

Esimerkki Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kun } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{kun } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

molemmat osittaisderivaatat $D_1 f(x,y)$, $D_2 f(x,y)$ saavat origossa arvon 0. Voidaan kuitenkin osoittaa, ettei f ole differentioituva origossa.

Lause 3.8 Jos funktio f on derivoituva jossakin pisteen $\overline{a}$ ympäristössä ja osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä $\overline{a}$, niin f on differentioituva pisteessä $\overline{a}$.

Esimerkki Onko funktio $f(x,y,z) := x^2 y \,|\, z \,|\, + xy$ differentioituva pisteessä $(2,0,0)$?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y,z) &= 2xy \,|\, z \,|\, + y \\ D_2 f(x,y,z) &= x^2 \,|\, z \,|\, + x \\ D_3 f(x,y,z) &= \lim_{h \to 0} \tfrac{f(2,0,n) - f(2,0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \tfrac{0-0}{h} = 0 \\ D_1 f(2,0,0) &= 0 \\ D_2 f(2,0,0) &= 2 \end{aligned}$$

Funktio f on siis derivoituva pisteessä $(2,0,0)$. Funktio f on differentioituva pisteessä $(2,0,0)$, jos

$$f(2+h_1, h_2, h_3) - f(2,0,0) = D_1 f(2,0,0)h_1 + D_2 f(2,0,0)h_2 + D_3 f(2,0,0)h_3 + \left| \overline{h} \right| \varepsilon(\overline{h}),$$

missä $\varepsilon \to 0$ kun $\left| \overline{h} \right| \to 0$. Ratkaistaan tästä ε ja tutkitaan sen käyttäytymistä, kun $\left|\,\overline{h}\,\right| \to 0$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\overline{h}) &= \frac{f(2+h_1,h_2,h_3)-f(2,0,0)-2h_2}{\left|\,\overline{h}\,\right|} \\
&= \frac{(2+h_1)^2h_2\,|\,h_3\,|+(2+h_1)h_2-2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} \\
&= (2+h_1)^2\,|\,h_3\,|\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}+h_1\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} \\
&\le (2+h_1)^2\,|\,h_3\,|+|\,h_1\,| \to 0
\end{aligned}$$

kun $\overline{h} \to 0$. Tässä

$$\frac{|\,h_2\,|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} \le 1,$$

joten funktio f on differentioituva.

Lauseke

$$D_1f(\overline{a})h_1+D_2f(\overline{a})h_2+\cdots+D_nf(\overline{a})h_n$$

on nimeltään funktion f differentiaali pisteessä $\overline{a}$, merkitään $df(\overline{a})(\overline{h})$. Pätee siis

$$\triangle f = f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a}) \approx df(\overline{a})(\overline{h}),$$

kun $\overline{h}$ on "pieni".

Esimerkki Funktion $f(x,y)=x^3y^2$ osittaisderivaatat ovat

$$D_1f=3x^2y^2 \quad \text{ja} \quad D_2f=2x^3y.$$

Kun $\overline{a}=(a_1,a_2)=(1,2)$ ja $\overline{h}=(h_1,h_2)=(-0.04,0.05)$ on funktion f differentiaali

$$df(\overline{a})(\overline{h}) = D_1f(1,2)\cdot(-0.04)+D_2f(1,2)\cdot 0.05 = \ldots = -0.28$$

ja

$$\triangle f = f(0.96,2.05)-f(1,2) = 0.96^3\cdot 2.05-4 \approx -0.2819\ldots$$

Esimerkki (Virhearviointi) Pyritään määräämään maan vetovoiman kiihtyvyys (g) kokeellisesti, mittaamalla putoamisaikaa t ja putoamismatkaa s.

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow g=\frac{2s}{t^2}.$$

Mittaustulokset s ja t eroavat jonkin verran todellisista arvoista $s+h_1$, $s+h_2$. Tällöin g:n virhe

$$\triangle g = g(s+h_1,t+h_2)-g(s,t) \approx dg(s,t)(\overline{h}) = \frac{\partial g}{\partial s}h_1+\frac{\partial g}{\partial t}h_2 = \frac{2}{t^2}h_1-\frac{4s}{t^3}h_2.$$

Jos tiedetään mittaustarkkuudet eli $|\,h_1\,| \le \delta$ (jokin vakio) ja $|\,h_2\,| \le \tau$ (myös jokin vakio), niin

$$\left| dg(s,t)(\overline{h}) \right| \le \frac{2}{t^2}\delta + \frac{4\,|\,s\,|}{t^3}\tau.$$

(Huomatus! Osittaisderivaatan jatkuvuudesta seuraa siis differentioituvuus, josta taas seuraa osittaisderiviutuvuuden olemassaolo.)

3.4 Gradientti ja suunnatut derivaatat

Määritelmä 3.9 Olkoon $A \subset\circ \mathbf{R}^2$ ja $f : A \to \mathbf{R}$, differentioituva. Tällöin funktion f *gradientti* on vektoriarvoinen funktio $A \to \mathbf{R}^2$, Merkitään

$$\mathrm{grad} f = \nabla f := (D_1 f, D_2 f) = D_1 f \widehat{i} + D_2 f \widehat{j}.$$

Yleensä, jos $A \subset\circ \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}$ niin määritellään

$$\nabla f := (D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f).$$

Pätee

$$df(\overline{a})(\overline{h}) = D_1 f(ya)h_1 + D_2 f(\overline{a})h_2 = \Big(D_1 f(\overline{a}), D_2 f(\overline{a})\Big) \cdot (h_1, h_2) = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{h},$$

missä $\overline{h} = (h_1, h_2)$. Myös avaruudessa $\mathbf{R}^n$

$$df(\overline{a})(\overline{h}) = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{h}.$$

Olkoon $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2$ siten, että $|\,\overline{a}\,| = 1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. Olkoon funktio f pisteen $\overline{a} = (a_1, a_2)$ ympäristössä määritelty reaaliarvoinen funktio. Joukko

$$\{\overline{a} + t\overline{\alpha} \mid t \in \mathbf{R}\}$$

on pisteen $\overline{a}$ kautta kulkeva $\overline{\alpha}$:n suuntainen suora.

Määritelmä 3.10 Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{\alpha}) - f(\overline{a})}{t},$$

niin sitä kutsutaan derivaataksi suuntaan $\overline{\alpha}$ (pisteessä $\overline{a}$), merkitään $\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a})$.

Huomautus 1 Jos $\overline{\alpha} = (0,1) = \widehat{j}$, niin $\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = D_2 f$.

Huomautus 2 Määritelmä 3.10 (sivu 11) on sama $\mathbf{R}^n$:ssä.

Lause 3.11 Jos f on differentioituva pisteessä $\overline{a}$, niin $\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a})$ on olemassa jokaiseen suuntaan $\overline{\alpha}$ ja

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + D_2 f(\overline{a})\alpha_2 + \cdots + D_n f(\overline{a})\alpha_n = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{\alpha}.$$

Todistetaan myöhemmin.

Esimerkki Laske funktion

$$f(x, y, z) := x^4 + x^3 y + 2x^2 z$$

derivaatta pisteessä $(1, 2, 5)$ vektorin $(4, -2, 2)$ suuntaan.

Ratkaisu. Lasketaan vektorin $(4, -2, 2) = \overline{v}$ suuntainen yksikkövektori

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{v}}{|\,\overline{v}\,|} = \frac{(4, -2, 2)}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Osittaisderivaatat ovat

$$\begin{array}{rclrcl} D_1 f &=& 4x^3 + 3x^2 y + 4xz; & D_1 f(1, 2, 5) &=& 30 \\ D_2 f &=& x^3; & D_2 f(1, 2, 5) &=& 1 \\ D_3 f &=& 2x^2; & D_3 f(1, 2, 5) &=& 2, \end{array}$$

mistä seuraa

$$\begin{array}{rcl} \nabla f(1, 2, 5) &=& (30, 1, 2) \\ \partial_{\overline{\alpha}} f(1, 2, 5) &=& (30, 1, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{61}{\sqrt{6}}. \end{array}$$

Lauseen 3.11 (sivu 12) todistus:

Olkoon $\overline{a}$ tarkastelupiste, jossa funktio f on differentioituva ja olkoon $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, $|\,\overline{\alpha}\,| = 1$ ja $t \in \mathbf{R}$. Koska funktio f on differentioituva, niin

$$f(\overline{a} + t\overline{\alpha}) - f(\overline{a}) = D_1 f(\overline{a}) t\alpha_1 + \cdots + D_n f(\overline{a}) t\alpha_n + |\,t\,|\,|\,\overline{\alpha}\,|\,\varepsilon(t\overline{\alpha}).$$

Siis erotusosamäärä

$$\begin{aligned} \frac{f(\overline{a} + t\overline{\alpha}) - f(\overline{a})}{t} &= D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\overline{a})\alpha_n + \frac{|\,t\,|}{t}\varepsilon(t\overline{\alpha}) \\ &\longrightarrow D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\overline{a})\alpha_n \end{aligned}$$

kun $t \to 0$. Raja-arvo on siis olemassa, joten on olemassa suunnattu derivaatta, joka on

$$D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\overline{a})\alpha_n = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{\alpha}. \qquad \square$$

Huomautus! Suunnatulle derivaatalle saadaan arvio

$$\begin{aligned} |\,\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a})\,| &= |\,\nabla f(\overline{a})\cdot\overline{\alpha}\,| \\ &\leq |\,\nabla f(\overline{a})\,|\,|\,\overline{\alpha}\,| = |\,\nabla f(\overline{a})\,| \\ &= \sqrt{(D_1 f(\overline{a})\alpha_1)^2 + \cdots + (D_n f(\overline{a})\alpha_n)^2}. \end{aligned}$$

Erityisesti, jos $\nabla f(\overline{a}) = 0$, niin $\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = 0$ kaikkiin suuntiin α. Jos $\nabla f(\overline{a}) \neq 0$, niin voidaan kysyä, mihin suuntaan $\overline{\alpha}$ saadaan suurin derivaatta. Vastaus: Kun $\overline{\alpha} \uparrow\uparrow \nabla f(\overline{a})$ eli

$$\overline{\alpha} = \frac{\nabla f(\overline{a})}{|\,\nabla f(\overline{a})\,|};$$

silloin pätee

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{a})\cdot\overline{\alpha} = \nabla f(\overline{a})\cdot\frac{\nabla f(\overline{a})}{|\,\nabla f(\overline{a})\,|} = \frac{|\,\nabla f(\overline{a})\,|^2}{|\,\nabla f(\overline{a})\,|} = |\,\nabla f(\overline{a})\,|\,.$$

3.5 Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen

Määritelmä 3.11 Vektoriarvoista funktiota

$$g := (g_1,\ldots,g_n), \quad g:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n, g_j:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$$

sanotaan differentioituvaksi pisteessä $\overline{a}$, jos jokainen komponenttifunktio g_j on differentioituva pisteessä $\overline{a}$.

Lause 3.12 (Ketjusääntö) Olkoon $g:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $g = (g_1,\ldots,g_n)$ pisteessä $\overline{a}$ differentioituva funktio ja $f : U \to \mathbf{R}$, $g(\overline{a}) \in U \subset\circ\, \mathbf{R}^n$ pisteessä $g(\overline{a})$ differentioituva funktio. Tällöin $f\circ g$ on differentioituva pisteessä $\overline{a}$ ja

$$D_i(f\circ g) = \sum_{j=1}^{n} \Big(D_j f\Big)\Big(g(\overline{a})\Big)\Big(D_i g_j\Big)(\overline{a}),$$

missä $i = 1,\ldots,m$.

Esimerkki Olkoot funktiot $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ja $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Nyt

$$D(f\circ g)(a) = f'\Big(g(a)\Big)\cdot g(a).$$

Esimerkki Olkoot $m = 1$, $n = 2$, $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + e^y + e^{xy}$ ja $g(t) = (t, 1-t) = (g_1(t), g_2(t))$. Nyt

$$f\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad f\circ g(t) = t^2 + e^{1-t} + e^{t(1-t)}$$

ja

$$D(f \circ g)(t) = 2t - e^{1-t} + (1-2t)e^{t-2t}.$$

Lauseen 3.12 (sivu 13) avulla:

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) &= 2x + ye^{xy} \\ D_2 f(x,y) &= e^y + xe^{xy} \end{cases}, \quad \begin{cases} Dg_1(t) &= 1 \\ Dg_2(t) &= -1, \end{cases}$$

joten

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(t) &= (D_1 f)\big(g(t)\big) \cdot (Dg_1)(t) + (D_2 f)\big(g(t)\big) \cdot (Dg_2)(t) \\ &= \Big(2t + (1-t)e^{t(1-t)}\Big) \cdot 1 + \Big(e^{1-t} + te^{t(1-t)}\Big) \cdot (-1) \\ &= 2t - e^{1-t} + (1-2t)e^{t-2t}. \end{aligned}$$

Jos g (sisäfunktio) on yhden muuttujan funktio, niin $f \circ g$ on myös yhden muuttujan funktio ja

$$D\Big(f \circ g\Big) = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)\Big(g(t)\Big) g'(t).$$

Esimerkki Oletetaan että $n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ ja funktio f on yhden muuttujan funktio, g skalaariarvoinen funktio. Tällöin $f \circ g$ on m:n muuttujan funktio,

$$f \circ g(x_1, \ldots, x_m) = f\Big(g(x_1, \ldots, x_m)\Big)$$

ja

$$D_i f \circ g(\overline{x}) = f'\Big(g(\overline{x})\Big) \cdot D_i g(\overline{x}), \quad i = 1, \ldots, m, \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Esimerkki Määritellään funktiot f ja g siten, että

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) &= x^2 + \sin x \\ g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad g(\overline{x}) &= x_1 - x_2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Nyt $n = 1$, $m = 3$ ja $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Yhdistetty kuvaus $f \circ g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ on

$$f \circ g(\overline{x}) = (x_1 - x_2 + x_3^2)^2 + \sin(x_1 - x_2 + x_3^2).$$

Lasketaan tämän osittaisderivaatat:

$$f'(x) = 2x + \cos x$$

ja

$$D_1 g(\overline{x}) = 1, \quad D_2 g(\overline{x}) = -1 \text{ ja } D_3 g(\overline{x}) = 2x_3,$$

joten

$$\begin{aligned}
D_1(f\circ g)(\overline{x}) &= \Big(2(x_1-x_2+x_3^2)+\cos(x_1-x_2+x_3^2)\Big)\cdot 1\\
D_2(f\circ g)(\overline{x}) &= -2(x_1-x_2+x_3^2)-\cos(x_1-x_2+x_3^2)\\
D_3(f\circ g)(\overline{x}) &= 2x_3\cdot 2(x_1-x_2+x_3^2)+2x_3\cos(x_1-x_2+x_3^2).
\end{aligned}$$

Lauseen 3.12 (sivu 13) todistuksen idea:

Valitaan $\overline{a}\in\mathbf{R}^m$ tarkastelupiste, $\overline{h}\in\mathbf{R}^m$ ”pieni muutos”.

$$(f\circ g)(\overline{a}+\overline{h})-(f\circ g)(\overline{a}) = f\Big(g(\overline{a}+\overline{h})\Big)-f\Big(g(\overline{a})\Big) = f\Big(g(\overline{a})+\overline{k}\Big)-f\Big(g(\overline{a})\Big), \quad (8)$$

missä $\overline{k}=g(\overline{a}+\overline{h})-g(\overline{a})$. Kaikilla $j=1,\dots,n$:

$$k_j = g_j(\overline{a}+\overline{h})-g_j(\overline{a}).$$

Koska g_j on differentioituva

$$k_j = D_1g_j(\overline{a})h_1+\cdots+D_ng_j(\overline{a})h_m+\left|\overline{h}\right|\varepsilon_j(\overline{h}) = \sum_{i=1}^m D_ig_j(\overline{a})h_i+\left|\overline{h}\right|\varepsilon_j(\overline{h}). \quad (9)$$

Toisaalta myös f on differentioituva pisteessä $g(\overline{a})$, joten

$$\begin{aligned}
f\Big(g(\overline{a})+\overline{k}\Big)-f\Big(g(\overline{a})\Big) &= D_1f\Big(g(\overline{a})\Big)k_1+\cdots+D_nf\Big(g(\overline{a})\Big)k_n+\left|\overline{k}\right|\widetilde{\varepsilon}(\overline{k})\\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n (D_jf)\Big(g(\overline{a})\Big)k_j+\left|\overline{k}\right|\widetilde{\varepsilon}(\overline{k}).
\end{aligned} \quad (10)$$

Yhdistämällä kaavat (8), (9) ja (10) saadaan

$$f\circ g(\overline{a}+\overline{h})-f\circ g(\overline{a}) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^n D_jf\Big(g(\overline{a})\Big)D_ig_j(\overline{a})\Big)}_{(*)}h_i+\eta.$$

Pitkähkö tarkastelu osoittaa, että $\eta\longrightarrow\overline{0}$ riittävän nopeasti, kun $\overline{h}\to 0$ (tarkemmin sanoen $\frac{\eta(\overline{h})}{|\overline{h}|}\to 0$ kun $\overline{h}\to 0$). Tämän jälkeen Differentioituvuuden määritelmästä seuraa

$$(*) = D_i(f\circ g)(\overline{a}).$$

Esimerkki Olkoon $f(x,y)=x^2y-y^3$. Laske funktion $t\mapsto f(2t^3-5t,t^4+3t+7)$ derivaatta, kun $t=-2$.

Ratkaisu. Merkitään

$$h(t) = f(2t^3-5t,t^4+3t+7) = f\circ g(t),$$

missä

$$g(t) = (2t^3 - 5t, t^4 + 3t + 7) =: \Big(g_1(t), g_2(t)\Big).$$

Lauseesta 3.12 (sivu 13) seuraa

$$h'(t) = D_1 f\Big(g(t)\Big)g_1'(t) + D_2 f\Big(g(t)\Big)g_2'(t).$$

Nyt

$$\begin{array}{rclrcl} g_1' & = & 6t^2 - 5; & g_2' & = & 4t^3 + 3 \\ D_1 f(x,y) & = & 2xy; & D_2 f(x,y) & = & x^2 - 3y^2 \\ & & & & & \\ g(-2) & = & (-6,3) & & & \\ D_1 f(-6,3) & = & -36; & D_2 f(-6,3) & = & 9 \\ g_1'(-2) & = & 19; & g_2'(-2) & = & -29 \end{array}$$

Joten

$$h'(-2) = -36 \cdot 19 + 9 \cdot (-29) = -945.$$

Esimerkki Olkoon $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ differentioituva ja $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ määritelty kaavalla

$$h(x,y) = f(x^2 - y^2, xy^2, 2y); \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Laske $D_1 h$ ja $D_2 h$ funktion f derivaattojen avulla.

Ratkaisu. Pätee $h = f \circ g$, missä

$$g(x,y) = (x^2 - y^2, xy^2, 2y).$$

Ketjusääntö: (h:n osittaisderivaatta x:n suhteen $i = 1$ ketjusäännössä)

$$\begin{array}{rcl} D_1 h(x,y) & = & D_1 f\Big(g(x,y)\Big)D_1 g_1(x,y) + D_2 f\Big(g(x,y)\Big)D_1 g_2(x,y) \\ & & +D_3 f\Big(g(x,y)\Big)D_1 g_3(x,y) \\ & = & 2x D_1 f\Big(g(x,y)\Big) + y^2 D_2 f\Big(g(x,y)\Big). \end{array}$$

Vastaavalla laskulla kun $i = 2$

$$D_2 h(x,y) = -2y D_1 f\Big(g(x,y)\Big) + 2xy D_2 f\Big(g(x,y)\Big) + 2 D_3 f\Big(g(x,y)\Big).$$