

Analyysi II

Jari Taskinen

16. huhtikuuta 2002

Luku 3

Sisältö

3	Differentiaalilaskenta	2
3.1	Osittaisderivaatta	2
3.2	Korkeamman kertaluvun derivaatat	5
3.3	Differentioituvuus	11
3.4	Gradientti ja suunnatut derivaatat	16
3.5	Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen	19

Sisältö:

- Differentiaali-
laskenta
- Osittaisderivaatta
- Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
- Differentioituvuus
- Gradientti ja
suunnatut derivaatat
- Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 1 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

3. Differentiaalilaskenta

Differentiaalilaskenta

3.1. Osittaisderivaatta

Osittaisderivaatta

Määritelmä 3.1 Olkoon $\bar{a} = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ ja f reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty ainakin \bar{a} :n jossakin ympäristössä. Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

niin tätä sanotaan funktion f osittaisderivaataksi 1. muuttujan suhteen (tai x :n suhteen) pisteessä \bar{a} . Merkitään

$$D_1 f(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}), \quad f_{x_1}(\bar{a}), \quad f'_{x_1}(\bar{a}).$$

Vastaavasti määritellään f :n osittaisderivaatta toisen muuttujan suhteen raja-arvona

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Tätä merkitään

$$D_2 f(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a}) \text{ jne.}$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 2 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Sanotaan, että funktio f on derivoituva pisteessä \bar{a} , jos derivaatat $D_1f(\bar{a})$ ja $D_2f(\bar{a})$ ovat olemassa. Jos funktio f on derivoituva joukon A jokaisessa pisteessä, niin f on derivoituva joukossa A .

Esimerkki Olkoon

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{kun } (x, y) = (1, 0) \\ \frac{xy^3}{(x-1)^2+y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (1, 0) \end{cases}$$

Tällöin

$$D_1f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

ja

$$D_2f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, h) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Olkoon f kuten yllä. Pitäen muuttujaa y kiinteänä määritellään x :n funktio $g(x) := f(x, y)$. Silloin

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h), y) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Näemme siis, että osittaisderivaatta x :n suhteen voidaan muodostaa tuttuja derivoimis-sääntöjä käyttäen (pitämällä y vakiona).

Esimerkki Jos

$$f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y,$$

Sisältö:

Differentiaali-

laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 3 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

on osittaisderivaatta

$$D_1 f(x, y) = 3y^2 x^2 + 4x^3 \sin y.$$

Jos

$$g(x, y) = y^2 + e^{xy},$$

on osittaisderivaatta

$$D_1 g(x, y) = 0 + e^{xy} \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = e^{xy} y.$$

Vastaavasti $\frac{\partial}{\partial y}$ muodostetaan pitämällä x :ää vakiona (f ja g kuten yllä):

$$\begin{aligned} D_2 f(x, y) &= 2x^3 y + x^4 \cos y, \\ D_2 g(x, y) &= 2y + x e^{xy}. \end{aligned}$$

Useamman muuttujan funktion osittaisderivaatat

Olkoon funktio g määritelty pisteen $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ympäristössä, ja $j \in \{1, \dots, n\}$. Raja-arvot

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - g(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)}{h}$$

on osittaisderivaatta j :nen muuttujan suhteen, ja sitä merkitään $D_j g(\bar{a})$.

Esimerkki Määritellään funktio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_3 + \sin(x_2 + x_4) + e^{x_1 + x_4}.$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 4 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Sen osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned}D_1 f &= 2x_1 x_3 + 0 + e^{x_1+x_4} \cdot \underbrace{D_1(x_1+x_4)}_{=1} = 2x_1 x_3 + e^{x_1+x_4} \\D_2 f &= 0 + \cos(x_2+x_4) + 0 = \cos(x_2+x_4) \\D_3 f &= x_1^2 \\D_4 f &= \cos(x_2+x_4) + e^{x_1+x_4}.\end{aligned}$$

Huomautamme, että derivoituvan funktion ei tarvitse olla jatkuva.

Esimerkki Funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \vee y = 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ei ole jatkuva pisteessä $\bar{0} = (0, 0)$, mutta

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0, \quad D_2 f(0, 0) = 0.$$

3.2. Korkeamman kertaluvun derivaatat

Korkeamman kertaluvun derivaatat

Jos derivaatta $D_j f$ on olemassa pisteen \bar{a} ympäristössä ja $D_j f$ on derivoituva k :nen muuttujan suhteen, saadaan 2. kertaluvun osittaisderivaatta

$$D_{jk} f(\bar{a}) = \left(D_k (D_j f) \right) (\bar{a})$$

Sisältö:
Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 5 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

($j, k \in \{1, \dots, n\}$, kun f on n :n muuttujan funktio). Merkitään myös

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{a}).$$

Vastaavasti määritellään funktion f korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat

$$D_{jki}f := D_i(D_{jk}f)$$

ja niin edelleen. Sanotaan, että f on m kertaa jatkuvasti derivoituva, jos kaikki enintään kertalukua m olevat osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Esimerkki Funktion

$$f(x, y, z) := x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xz)$$

osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1f &= 3y^2x^2 + 4x^3 \sin y - z \sin(xz) \\ D_2f &= 2x^3y + x^4 \cos y \\ D_3f &= -x \sin(xz). \end{aligned}$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Sivu 6 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Päteekö $D_{12} = D_{21}$?

$$\begin{aligned}D_{11}f &= 6xy^2 + 12x^2 \sin y - z^2 \cos(xz) \\D_{22}f &= 2x^3 - x^4 \sin y \\D_{33}f &= -x^2 \cos(xz) \\D_{12}f &= D_2(D_1f) = 6x^2y + 4x^3 \cos y \\D_{21}f &= D_1(D_2f) = 6x^2y + 4x^3 \cos y \\D_{13}f &= D_3(D_1f) = -\sin(xz) - xz \cos(xz) \\D_{31}f &= D_1(D_3f) = -\sin(xz) - xz \cos(xz) \\D_{23}f &= 0 \\D_{32}f &= 0.\end{aligned}$$

Esimerkki Määritellään funktio

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq \bar{0} \\ 0 & \text{kun } (x, y) = \bar{0}. \end{cases}$$

Kun $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned}D_1f &= D_1\left(\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}\quad (1)$$

ja

$$D_2f = \dots = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.\quad (2)$$

Sisältö:
Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 7 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Tuloksesta (1) seuraa

$$D_1 f(0, y) = \frac{0 \cdot y^3 + 0 \cdot y - y^5}{(0^2 + y^2)^2} = \frac{-y^5}{y^4} = -y, \quad \text{kun } y \neq 0, \quad (3)$$

ja tuloksesta (2)

$$D_2 f(x, 0) = \dots = x, \quad x \neq 0. \quad (4)$$

Osittaisderivaatat origossa ovat

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0 \cdot (h^2 - 0^2)}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \quad (5)$$

ja

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \dots = 0. \quad (6)$$

Nyt tuloksien (3) ja (5) avulla saadaan

$$D_{12} f(0, 0) = D_2(D_1 f)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_1 f(0, h) - D_1 f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

ja tuloksista (4) ja (6)

$$D_{21} f(0, 0) = D_1(D_2 f)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2 f(h, 0) - D_2 f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

On kuitenkin vain erikoistapaus, että osittaisderivaatat saavat eri arvot.

Sisältö:

Differentiaali-

laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

[Etusivu](#)

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Sivu 8 / 25

[Takaisin](#)

[Koko näyttö](#)

[Lopeta](#)

Lause 3.2 Olkoon funktio f reaaliarvoinen kuvaus, joka on määritelty pisteen $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä. Oletetaan, että $D_{12}f$ ja $D_{21}f$ ovat olemassa pisteen (a, b) ympäristössä ja jatkuvia ainakin pisteessä (a, b) . Silloin

$$D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b).$$

Todistus sivuutetaan.

Esimerkki Olkoon

$$f(x, y) = x^2y + e^{xy}.$$

Osittaisderivaatat

$$D_1 = 2xy + ye^{xy}$$

$$D_2 = x^2 + xe^{xy}$$

$$D_{21} = 2x + e^{xy}(1 + xy)$$

$$D_{12} = 2x + e^{xy}(1 + xy)$$

Olkoon $f = (f_1, \dots, f_n)$ pisteen $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$ ympäristössä määritelty vektoriarvoinen kuvaus. Määritellään funktion f osittaisderivaatta x_j :n suhteen pisteessä \bar{a} raja-arvona

$$D_j f(\bar{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{h}$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Ei ole vaikea osoittaa, että osittaisderivaatta saadaan derivoimalla komponenttifunktiot:

$$D_j f(\bar{a}) = (D_j f_1(\bar{a}), \dots, D_j f_n(\bar{a})).$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja
suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 9 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki Olkoon $m = 2, n = 3$ ja

$$f(x, y) = (\sin(x + y), x^2, e^{xy}).$$

Osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= (\cos(x + y), 2x, ye^{xy}) \\ D_2 f(x, y) &= (\cos(x + y), 0, xe^{xy}). \end{aligned}$$

Lause 3.3 Olkoon funktio f määritelty pisteessä $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$, reaaliarvoinen. Jos osittaisderivaatat $D_{ij}f$ ja $D_{ji}f$, $i < j$, ovat olemassa pisteen \bar{a} ympäristössä ja jatkuvia pisteessä \bar{a} , niin

$$D_{ij}f(\bar{a}) = D_{ji}f(\bar{a}), \quad i, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Todistus. Olkoon $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Määritellään

$$g(x, y) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_m)$$

joka on kahden muuttujan funktio. Funktiolle g pätee: x on määritelty pisteen $\bar{a}' = (a_i, a_j) \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä, D_1g, D_2g määritelty \bar{a}' :n ympäristössä jne... Sovelletaan lausetta 3.2 (sivu 9)

$$D_{ij}f(\bar{a}) = D_{12}g(a_i, a_j) = D_{21}g(a_j, a_i) = D_{ji}f(\bar{a}).$$

□

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 10 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki Jos $h : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ ja kaikki osittaisderivaatat kertalukuun 5 asti ovat jatkuvia, niin

$$D_{1234}h = D_{4321}h = D_{1432}h = \dots$$

Mutta tietenkään ei päde esimerkiksi $D_{213}h = D_{223}h$.

3.3. Differentioituvuus

Differentioituvuus

Yhden muuttujan funktio f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$ jos ja vain jos on olemassa $a \in \mathbf{R}$ siten, että

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\varepsilon(h),$$

missä ε on reaalimuuttujan funktio, määritelty 0:n ympäristössä ja $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Silloin $a = Df(x_0)$.

Tutkitaan samaa asiaa kahden muuttujan funktioille. Olkoon $\bar{a} = (a_1, a_2)$ tarkastelupiste ja oletetaan, että funktio f on määrätty pisteen \bar{a} jossakin ympäristössä U . Oletetaan, että $\bar{h} \in \mathbf{R}$ siten, että $\bar{a} + \bar{h} \in U$.

Määritelmä 3.4 Funktio f on differentioituva pisteessä \bar{a} , jos on olemassa luvut α_1 ja α_2 siten, että

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}), \quad (7)$$

missä ε on jossain origon ympäristössä V määritelty funktio $V \rightarrow \mathbf{R}$ ja $\varepsilon(\bar{h}) \rightarrow 0$ kun $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$. Jos merkitään $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, niin (7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \bar{\alpha} \cdot \bar{h} + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}).$$

Sisältö:
Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 11 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Määritelmä 3.5 Olkoon $A \in \mathbf{R}^2$. Funktio $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ on differentioituva joukossa A , jos se on differentioituva jokaisessa pisteessä $\bar{a} \in A$.

Lause 3.6 Jos funktio f on differentioituva pisteessä \bar{a} , niin se on jatkuva pisteessä \bar{a} .

Todistus. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < s, \text{ kun } |\bar{x} - \bar{a}| < r.$$

Olkoon ε kuten kaavassa (7), samoin $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Voidaan löytää s' siten, että $|\varepsilon(h)| < 1$, kun $|\bar{h}| < s'$. Valitaan $r = \min\left(s', \frac{s}{|\bar{\alpha}|+1}\right)$. Olkoon nyt \bar{x} sellainen, että $|\bar{x} - \bar{a}| < r$. Tällöin (merkitään $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a}$)

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| &= |f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})| = |\bar{\alpha} \cdot \bar{h} + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h})| \\ &\leq |\bar{\alpha} \cdot \bar{h}| + |\bar{h}| |\varepsilon(\bar{h})| \leq |\bar{h}| \left(|\bar{\alpha}| + |\varepsilon(\bar{h})| \right) \\ &\leq |\bar{x} - \bar{a}| \left(|\bar{\alpha}| + 1 \right) < r \left(|\bar{\alpha}| + 1 \right) \leq \frac{s}{|\bar{\alpha}|+1} (|\bar{\alpha}| + 1) = s. \end{aligned}$$

□

Lause 3.7 Jos funktio f on differentioituva pisteessä \bar{a} , niin f on derivoituva ja

$$D_j f(\bar{a}) = \alpha_j, \quad j = 1, 2$$

Todistus. Tapaus $j = 1$.

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}),$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 12 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

missä $\varepsilon(\bar{h}) \rightarrow 0$ kun $\bar{h} \rightarrow 0$. Tämä pätee, kun \bar{h} on jossakin $\bar{0}$:n ympäristössä. Erityisesti voidaan tarkastella tapausta $\bar{h} = (h_1, 0)$, missä $h_1 > 0$. Muodostetaan

$$\begin{aligned}\frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})}{h_1} &= \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = \frac{\alpha_1 h_1}{h_1} + \frac{|\bar{h}|}{h_1} \varepsilon(\bar{h}) \\ &= \alpha_1 + \frac{|\bar{h}|}{h_1} \varepsilon(\bar{h}) \rightarrow \alpha_1,\end{aligned}$$

kun $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$. Tämä todistaa, että $D_1 f(\bar{a}) = \alpha_1$, koska osittaisderivaatan määritelmän mukaan on toisaalta

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = D_1 f(\bar{a}).$$

Toinen muuttuja käsitellään vastaavasti. \square

Differentioituvuus ja muut edellä mainitut tulokset määritellään ja todistetaan samalla tavalla n :n muuttujan funktioille.

Esimerkki Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

molemmat osittaisderivaatat $D_1 f(x, y)$, $D_2 f(x, y)$ saavat origossa arvon 0. Voidaan kuitenkin osoittaa, ettei f ole differentioituva origossa.

Lause 3.8 Jos funktio f on derivoituva jossakin pisteen \bar{a} ympäristössä ja osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä \bar{a} , niin f on differentioituva pisteessä \bar{a} .

Sisältö:
Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 13 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki Onko funktio $f(x, y, z) := x^2y|z| + xy$ differentioituva pisteessä $(2, 0, 0)$?

Ratkaisu.

$$D_1f(x, y, z) = 2xy|z| + y$$

$$D_2f(x, y, z) = x^2|z| + x$$

$$D_3f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2, 0, h) - f(2, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$D_1f(2, 0, 0) = 0$$

$$D_2f(2, 0, 0) = 2$$

Funktio f on siis derivoituva pisteessä $(2, 0, 0)$. Funktio f on differentioituva pisteessä $(2, 0, 0)$, jos

$$f(2+h_1, h_2, h_3) - f(2, 0, 0) = D_1f(2, 0, 0)h_1 + D_2f(2, 0, 0)h_2 + D_3f(2, 0, 0)h_3 + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}),$$

missä $\varepsilon \rightarrow 0$ kun $|\bar{h}| \rightarrow 0$. Ratkaistaan tästä ε ja tutkitaan sen käyttäytymistä, kun $|\bar{h}| \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\bar{h}) &= \frac{f(2+h_1, h_2, h_3) - f(2, 0, 0) - 2h_2}{|\bar{h}|} \\ &= \frac{(2+h_1)^2h_2|h_3| + (2+h_1)h_2 - 2h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\ &= (2+h_1)^2|h_3| \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} + h_1 \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\ &\leq (2+h_1)^2|h_3| + |h_1| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kun $\bar{h} \rightarrow 0$. Tässä

$$\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \leq 1,$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 14 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

joten funktio f on differentioituva.

Lauseke

$$D_1 f(\bar{a})h_1 + D_2 f(\bar{a})h_2 + \dots + D_n f(\bar{a})h_n$$

on nimeltään funktion f differentiaali pisteessä \bar{a} , merkitään $df(\bar{a})(\bar{h})$. Pätee siis

$$\Delta f = f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \approx df(\bar{a})(\bar{h}),$$

kun \bar{h} on "pieni".

Esimerkki Funktion $f(x, y) = x^3 y^2$ osittaisderivaatat ovat

$$D_1 f = 3x^2 y^2 \quad \text{ja} \quad D_2 f = 2x^3 y.$$

Kun $\bar{a} = (a_1, a_2) = (1, 2)$ ja $\bar{h} = (h_1, h_2) = (-0.04, 0.05)$ on funktion f differentiaali

$$df(\bar{a})(\bar{h}) = D_1 f(1, 2) \cdot (-0.04) + D_2 f(1, 2) \cdot 0.05 = \dots = -0.28$$

ja

$$\Delta f = f(0.96, 2.05) - f(1, 2) = 0.96^3 \cdot 2.05 - 4 \approx -0.2819 \dots$$

Esimerkki (Virhearviointi) Pyritään määräämään maan vetovoiman kiihtyvyys (g) kokeellisesti, mittaamalla putoamisaikaa t ja putoamismatkaa s .

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow g = \frac{2s}{t^2}.$$

Mittaustulokset s ja t eroavat jonkin verran todellisista arvoista $s + h_1, t + h_2$. Tällöin g :n virhe

$$\Delta g = g(s + h_1, t + h_2) - g(s, t) \approx dg(s, t)(\bar{h}) = \frac{\partial g}{\partial s} h_1 + \frac{\partial g}{\partial t} h_2 = \frac{2}{t^2} h_1 - \frac{4s}{t^3} h_2.$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 15 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Jos tiedetään mittaustarkkuudet eli $|h_1| \leq \delta$ (jokin vakio) ja $|h_2| \leq \tau$ (myös jokin vakio), niin

$$|dg(s, t)(\bar{h})| \leq \frac{2}{t^2} \delta + \frac{4}{t^3} |s| \tau.$$

(Huomatus! Osittaisderivaatan jatkuvuudesta seuraa siis differentioituvuus, josta taas seuraa osittaisderiviutuvuuden olemassaolo.)

3.4. Gradientti ja suunnatut derivaatat

Gradientti ja suunnatut derivaatat

Määritelmä 3.9 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, differentioituva. Tällöin funktion f gradientti on vektoriarvoinen funktio $A \rightarrow \mathbf{R}^2$, Merkitään

$$\text{grad} f = \nabla f := (D_1 f, D_2 f) = D_1 f \hat{i} + D_2 f \hat{j}.$$

Yleensä, jos $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ niin määritellään

$$\nabla f := (D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f).$$

Pätee

$$df(\bar{a})(\bar{h}) = D_1 f(\bar{a})h_1 + D_2 f(\bar{a})h_2 = \left(D_1 f(\bar{a}), D_2 f(\bar{a}) \right) \cdot (h_1, h_2) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h},$$

missä $\bar{h} = (h_1, h_2)$. Myös avaruudessa \mathbf{R}^n

$$df(\bar{a})(\bar{h}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h}.$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 16 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Olkoon $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2$ siten, että $|\bar{\alpha}| = 1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. Olkoon funktio f pisteen $\bar{a} = (a_1, a_2)$ ympäristössä määritelty reaaliarvoinen funktio. Joukko

$$\{\bar{a} + t\bar{\alpha} \mid t \in \mathbf{R}\}$$

on pisteen \bar{a} kautta kulkeva $\bar{\alpha}$:n suuntainen suora.

Määritelmä 3.10 Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{\alpha}) - f(\bar{a})}{t},$$

niin sitä kutsutaan derivaataksi suuntaan $\bar{\alpha}$ (pisteessä \bar{a}), merkitään $\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a})$.

Huomautus 1 Jos $\bar{\alpha} = (0, 1) = \hat{j}$, niin $\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a}) = D_2 f$.

Huomautus 2 Määritelmä 3.10 (sivu 17) on sama \mathbf{R}^n :ssä.

Lause 3.11 Jos f on differentioituva pisteessä \bar{a} , niin $\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a})$ on olemassa jokaiseen suuntaan $\bar{\alpha}$ ja

$$\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a}) = D_1 f(\bar{a})\alpha_1 + D_2 f(\bar{a})\alpha_2 + \cdots + D_n f(\bar{a})\alpha_n = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha}.$$

Todistetaan myöhemmin.

Esimerkki Laske funktion

$$f(x, y, z) := x^4 + x^3y + 2x^2z$$

derivaatta pisteessä $(1, 2, 5)$ vektorin $(4, -2, 2)$ suuntaan.

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 17 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Ratkaisu. Lasketaan vektorin $(4, -2, 2) = \bar{v}$ suuntainen yksikkövektori

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{(4, -2, 2)}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f &= 4x^3 + 3x^2y + 4xz; & D_1 f(1, 2, 5) &= 30 \\ D_2 f &= x^3; & D_2 f(1, 2, 5) &= 1 \\ D_3 f &= 2x^2; & D_3 f(1, 2, 5) &= 2, \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2, 5) &= (30, 1, 2) \\ \partial_{\bar{\alpha}} f(1, 2, 5) &= (30, 1, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \frac{61}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Lauseen 3.11 (sivu 17) todistus:

Olkoon \bar{a} tarkastelupiste, jossa funktio f on differentioituva ja olkoon $\bar{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, $|\bar{\alpha}| = 1$ ja $t \in \mathbf{R}$. Koska funktio f on differentioituva, niin

$$f(\bar{a} + t\bar{\alpha}) - f(\bar{a}) = D_1 f(\bar{a})t\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})t\alpha_n + |t| |\bar{\alpha}| \varepsilon(t\bar{\alpha}).$$

Siis erotusosamäärä

$$\begin{aligned} \frac{f(\bar{a} + t\bar{\alpha}) - f(\bar{a})}{t} &= D_1 f(\bar{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})\alpha_n + \frac{|t|}{t} \varepsilon(t\bar{\alpha}) \\ &\longrightarrow D_1 f(\bar{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})\alpha_n \end{aligned}$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja
suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 18 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

kun $t \rightarrow 0$. Raja-arvo on siis olemassa, joten on olemassa suunnattu derivaatta, joka on

$$D_1 f(\bar{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})\alpha_n = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha}. \quad \square$$

Huomaus! Suunnatulle derivaatalle saadaan arvio

$$\begin{aligned} |\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a})| &= |\nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha}| \\ &\leq |\nabla f(\bar{a})| |\bar{\alpha}| = |\nabla f(\bar{a})| \\ &= \sqrt{(D_1 f(\bar{a})\alpha_1)^2 + \cdots + (D_n f(\bar{a})\alpha_n)^2}. \end{aligned}$$

Erityisesti, jos $\nabla f(\bar{a}) = 0$, niin $\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a}) = 0$ kaikkiin suuntiin α . Jos $\nabla f(\bar{a}) \neq 0$, niin voidaan kysyä, mihin suuntaan $\bar{\alpha}$ saadaan suurin derivaatta. Vastaus: Kun $\bar{\alpha} \uparrow \nabla f(\bar{a})$ eli

$$\bar{\alpha} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{|\nabla f(\bar{a})|};$$

silloin pätee

$$\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha} = \nabla f(\bar{a}) \cdot \frac{\nabla f(\bar{a})}{|\nabla f(\bar{a})|} = \frac{|\nabla f(\bar{a})|^2}{|\nabla f(\bar{a})|} = |\nabla f(\bar{a})|.$$

3.5. Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen

Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen

Määritelmä 3.11 Vektoriarvoista funktiota

$$g := (g_1, \dots, g_n), \quad g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n, g_j : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 19 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

sanotaan differentioituvaksi pisteessä \bar{a} , jos jokainen komponenttifunktio g_j on differentioituva pisteessä \bar{a} .

Lause 3.12 (Ketjusääntö) Olkoon $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, $g = (g_1, \dots, g_n)$ pisteessä \bar{a} differentioituva funktio ja $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $g(\bar{a}) \in U \subset \mathbf{R}^n$ pisteessä $g(\bar{a})$ differentioituva funktio. Tällöin $f \circ g$ on differentioituva pisteessä \bar{a} ja

$$D_i(f \circ g) = \sum_{j=1}^n (D_j f)(g(\bar{a})) (D_i g_j)(\bar{a}),$$

missä $i = 1, \dots, m$.

Esimerkki Olkoot funktiot $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ja $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Nyt

$$D(f \circ g)(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Esimerkki Olkoot $m = 1$, $n = 2$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + e^y + e^{xy}$ ja $g(t) = (t, 1 - t) = (g_1(t), g_2(t))$. Nyt

$$f \circ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f \circ g(t) = t^2 + e^{1-t} + e^{t(1-t)}$$

ja

$$D(f \circ g)(t) = 2t - e^{1-t} + (1 - 2t)e^{t(1-t)}.$$

Lauseen 3.12 (sivu 20) avulla:

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 2x + ye^{xy} \\ D_2 f(x, y) = e^y + xe^{xy} \end{cases}, \quad \begin{cases} Dg_1(t) = 1 \\ Dg_2(t) = -1, \end{cases}$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 20 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

joten

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(t) &= (D_1f)(g(t)) \cdot (Dg_1)(t) + (D_2f)(g(t)) \cdot (Dg_2)(t) \\ &= \left(2t + (1-t)e^{t(1-t)}\right) \cdot 1 + \left(e^{1-t} + te^{t(1-t)}\right) \cdot (-1) \\ &= 2t - e^{1-t} + (1-2t)e^{t-2t}. \end{aligned}$$

Jos g (sisäfunktio) on yhden muuttujan funktio, niin $f \circ g$ on myös yhden muuttujan funktio ja

$$D(f \circ g) = \sum_{j=1}^n (D_j f)(g(t)) g'(t).$$

Esimerkki Oletetaan että $n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ ja funktio f on yhden muuttujan funktio, g skalaariarvoinen funktio. Tällöin $f \circ g$ on m :n muuttujan funktio,

$$f \circ g(x_1, \dots, x_m) = f(g(x_1, \dots, x_m))$$

ja

$$D_i f \circ g(\bar{x}) = f'(g(\bar{x})) \cdot D_i g(\bar{x}), \quad i = 1, \dots, m, \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Esimerkki Määritellään funktiot f ja g siten, että

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}, & f(x) &= x^2 + \sin x \\ g : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}, & g(\bar{x}) &= x_1 - x_2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Sisältö:
Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Sivu 21 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Nyt $n = 1$, $m = 3$ ja $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Yhdistetty kuvaus $f \circ g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ on

$$f \circ g(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + x_3^2)^2 + \sin(x_1 - x_2 + x_3^2).$$

Lasketaan tämän osittaisderivaatat:

$$f'(x) = 2x + \cos x$$

ja

$$D_1g(\bar{x}) = 1, \quad D_2g(\bar{x}) = -1 \text{ ja } D_3g(\bar{x}) = 2x_3,$$

joten

$$\begin{aligned} D_1(f \circ g)(\bar{x}) &= \left(2(x_1 - x_2 + x_3^2) + \cos(x_1 - x_2 + x_3^2) \right) \cdot 1 \\ D_2(f \circ g)(\bar{x}) &= -2(x_1 - x_2 + x_3^2) - \cos(x_1 - x_2 + x_3^2) \\ D_3(f \circ g)(\bar{x}) &= 2x_3 \cdot 2(x_1 - x_2 + x_3^2) + 2x_3 \cos(x_1 - x_2 + x_3^2). \end{aligned}$$

Lauseen 3.12 (sivu 20) todistuksen idea:

Valitaan $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$ tarkastelupiste, $\bar{h} \in \mathbf{R}^m$ "pieni muutos".

$$(f \circ g)(\bar{a} + \bar{h}) - (f \circ g)(\bar{a}) = f(g(\bar{a} + \bar{h})) - f(g(\bar{a})) = f(g(\bar{a}) + \bar{k}) - f(g(\bar{a})), \quad (8)$$

missä $\bar{k} = g(\bar{a} + \bar{h}) - g(\bar{a})$. Kaikilla $j = 1, \dots, n$:

$$k_j = g_j(\bar{a} + \bar{h}) - g_j(\bar{a}).$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja
suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 22 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Koska g_j on differentioituva

$$k_j = D_1 g_j(\bar{a})h_1 + \cdots + D_n g_j(\bar{a})h_n + |\bar{h}| \varepsilon_j(\bar{h}) = \sum_{i=1}^m D_i g_j(\bar{a})h_i + |\bar{h}| \varepsilon_j(\bar{h}). \quad (9)$$

Toisaalta myös f on differentioituva pisteessä $g(\bar{a})$, joten

$$\begin{aligned} f(g(\bar{a}) + \bar{k}) - f(g(\bar{a})) &= D_1 f(g(\bar{a}))k_1 + \cdots + D_n f(g(\bar{a}))k_n + |\bar{k}| \tilde{\varepsilon}(\bar{k}) \\ &= \sum_{j=1}^n (D_j f)(g(\bar{a}))k_j + |\bar{k}| \tilde{\varepsilon}(\bar{k}). \end{aligned} \quad (10)$$

Yhdistämällä kaavat (8), (9) ja (10) saadaan

$$f \circ g(\bar{a} + \bar{h}) - f \circ g(\bar{a}) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n D_j f(g(\bar{a})) D_i g_j(\bar{a}) \right)}_{(*)} h_i + \eta.$$

Pitkähkö tarkastelu osoittaa, että $\eta \rightarrow 0$ riittävän nopeasti, kun $\bar{h} \rightarrow 0$ (tarkemmin sanoen $\frac{\eta(\bar{h})}{|\bar{h}|} \rightarrow 0$ kun $\bar{h} \rightarrow 0$). Tämän jälkeen Differentioituvuuden määritelmästä seuraa

$$(*) = D_i(f \circ g)(\bar{a}).$$

Esimerkki Olkoon $f(x, y) = x^2 y - y^3$. Laske funktion $t \mapsto f(2t^3 - 5t, t^4 + 3t + 7)$ derivaatta, kun $t = -2$.

Ratkaisu. Merkitään

$$h(t) = f(2t^3 - 5t, t^4 + 3t + 7) = f \circ g(t),$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 23 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

missä

$$g(t) = (2t^3 - 5t, t^4 + 3t + 7) =: (g_1(t), g_2(t)).$$

Lauseesta 3.12 (sivu 20) seuraa

$$h'(t) = D_1f(g(t))g_1'(t) + D_2f(g(t))g_2'(t).$$

Nyt

$$\begin{aligned} g_1' &= 6t^2 - 5; & g_2' &= 4t^3 + 3 \\ D_1f(x, y) &= 2xy; & D_2f(x, y) &= x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-6, 3) \\ D_1f(-6, 3) &= -36; & D_2f(-6, 3) &= 9 \\ g_1'(-2) &= 19; & g_2'(-2) &= -29 \end{aligned}$$

Joten

$$h'(-2) = -36 \cdot 19 + 9 \cdot (-29) = -945.$$

Esimerkki Olkoon $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ differentioituva ja $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ määritelty kaavalla

$$h(x, y) = f(x^2 - y^2, xy^2, 2y); \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Laske D_1h ja D_2h funktion f derivaattojen avulla.

Ratkaisu. Pätee $h = f \circ g$, missä

$$g(x, y) = (x^2 - y^2, xy^2, 2y).$$

Sisältö:

Differentiaali-
laskenta

Osittaisderivaatta

Korkeamman

kertaluvun

derivaatat

Differentioituvuus

Gradientti ja

suunnatut derivaatat

Yhdistettyjen

kuvausten

derivoiminen

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 24 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Ketjusääntö: (h :n osittaisderivaatta x :n suhteen $i = 1$ ketjusäännössä)

$$\begin{aligned} D_1 h(x, y) &= D_1 f(g(x, y)) D_1 g_1(x, y) + D_2 f(g(x, y)) D_1 g_2(x, y) \\ &\quad + D_3 f(g(x, y)) D_1 g_3(x, y) \\ &= 2x D_1 f(g(x, y)) + y^2 D_2 f(g(x, y)). \end{aligned}$$

Vastaavalla laskulla kun $i = 2$

$$D_2 h(x, y) = -2y D_1 f(g(x, y)) + 2xy D_2 f(g(x, y)) + 2D_3 f(g(x, y)).$$

Sisältö:
Differentiaali-
laskenta
Osittaisderivaatta
Korkeamman
kertaluvun
derivaatat
Differentioituvuus
Gradientti ja
suunnatut derivaatat
Yhdistettyjen
kuvausten
derivoiminen

Etusivu



Sivu 25 / 25

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta