Analyysi II

Jari Taskinen

18. huhtikuuta 2002

Luku 4

Sisältö

4. Käyrät, tasa-arvopinnat ja tangenttitaso

ktt

Määritelmä 4.1 Olkoon $\Delta \subset \mathbf{R}$ väli (rajoitettu tai rajoittamaton) ja $f : \Delta \to \mathbf{R}^2$ jatkuva. Silloin joukko $\Gamma := f(\Delta)$ on *jatkuva* käyrä. Yhtälöpari

$$\begin{cases} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{cases}, \quad t \in \Delta$$

on käyrän Γ *parametriesitys*, t *parametri*.

Esimerkki Määritellään

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2 + 3t \\ f_2(t) &= 1 + 2t \end{aligned}, \quad t \in [0, 1] =: \Delta.$$

Sillon Γ on jana, katso kuva 1. Jos

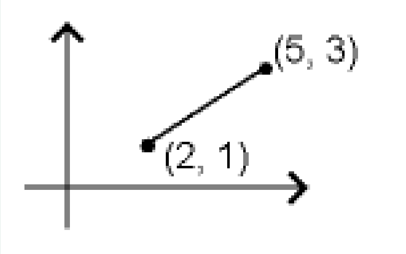
$$\begin{aligned} f_1(t) &= x_1 + (x_2 - x_1)t \\ f_2(t) &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \end{aligned}$$

niin Γ on jana, jonka päätepisteet ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2).

Esimerkki Määritellään

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 10 \cos t \\ f_2(t) &= 10 \sin t \end{aligned}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Nyt Γ on ympyrä jonka keskipiste on $\bar{0}$ ja säde 10.



Kuva 1: jana Γ

Huomautus. Sanotaan, että Γ on *rajoitettu*, jos se sisältyy johonkin kiekkoon $B(0, R)$ (jollekin $R \in \mathbf{R}^+$), muuten Γ on *rajoittamaton*.

Jos Δ on suljettu ja rajoitettu, niin f:n jatkuvuudesta seuraa, että Γ on rajoitettu. (Tämän asian todistus jätetään väliin.)

Esimerkki Määritellään

$$\begin{array}{rcl} f_1(t) & = & t \\ f_2(t) & = & \frac{1}{t} \end{array} \quad \text{ja} \quad \Delta =]0, 1[$$

Katso kuva 2.

Olkoon $\Delta = [a, b]$. Jos $f(a) = f(b)$, niin käyrä on *umpinainen*. Jos f on injektio, niin käyrää Γ sanotaan *kaareksi*.

Olkoon $\tau := [\alpha, \beta] \to [a, b]$ sellainen jatkuva surjektio, että $\tau(\alpha) = a$ ja $\tau(\beta) = b$. Silloin

$$\Gamma = g([\alpha, \beta]),$$

Kuva 2: käyrä $f(t) := (t, \frac{1}{t})$

missä $g := f \circ \tau$. Sanotaan, että käyrälle Γ on tehty parametrin vaihto.

Esimerkki Määritellään

$$\begin{array}{rcl} f_1(t) & = & 10\cos t \\ f_2(t) & = & 10\sin t \end{array}, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

ja

$$\tau : [0,1] \to [0, 2\pi] \qquad \tau(s) = 2\pi s.$$

Tällöin

$$g = f \circ \tau : [0,1] \to \mathbf{R}^2$$

ja

$$\begin{array}{rcl} g_1(s) & = & 10\cos 2\pi s \\ f_2(s) & = & 10\sin 2\pi s \end{array}, \quad s \in [0, 1]\,.$$

Parametrin vaihto on sallittu muulloinkin kuin suljetun välin tapauksessa.

Vastaavasti määritellään avaruuskäyrät: Jos

$$f : \Delta \to \mathbf{R}^3$$

on jatkuva, niin käyrä Γ on joukko $\Gamma = f(\Delta)$. Edellä mainitut termit käyvät myös tässä.

Olkoon

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Määritelmä 4.2 Olkoon L pisteen $f(s)$ kautta kulkeva suora, suuntavektori $\overline{\alpha}$. Tällöin L on Γ:n tangentti pisteessä $f(s)$, jos pisteiden $f(s)$ ja $f(r)$ kautta kulkevan suoran L_r suuntavektorille $\overline{\beta}(r)$ pätee:

$$\lim_{r \to s} \overline{\beta}(r) = \overline{\alpha}.$$

Lause 4.3 Yllä olevassa tilanteessa

$$\overline{\alpha} = \big(x'(s), y'(s)\big),$$

(mikäli ainakin toinen komponenteista $\neq 0$).

Todistus.

$$\overline{\beta}(r) \uparrow\uparrow \big(x(r) - x(s), y(r) - y(s)\big) \Rightarrow \overline{\beta}(r) \uparrow\uparrow \left(\frac{x(r) - x(s)}{r - s}, \frac{y(r) - y(s)}{r - s}\right),$$

ja viimeksi mainittu vektori lähestyy vektoria

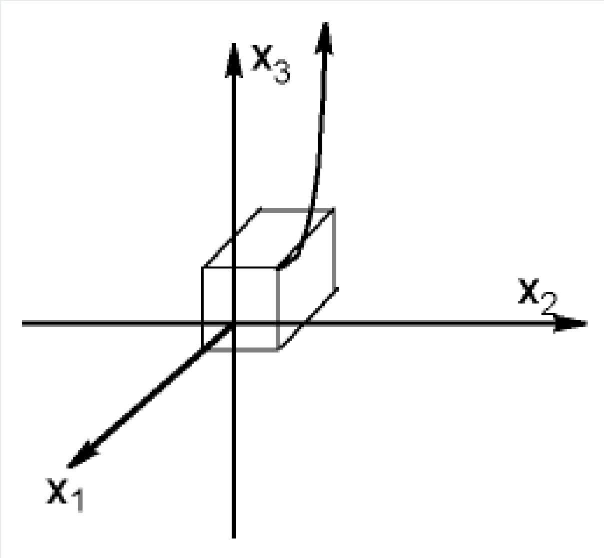
$$\big(x'(s), y'(s)\big),$$

kun $r \to s$. $\square$

$\mathbf{R}^3$:ssa $\overline{x}$ on pisteen $\overline{x}_0$ kautta kulkevan suoran S piste jos ja vain jos $\overline{x} = t\overline{\alpha} + \overline{x}_0$, missä $\overline{\alpha} \neq 0$ on suoran suuntavektori.

Avaruuskäyrän $t \mapsto \overline{x}(t)$ tangentti(suora) määritellään kuten määritelmässä 4.2 (sivu 4) ja pisteessä $\overline{x}(s)$ tangentti on vektorin

$$\big(x_1'(s), x_2'(s), x_3'(s)\big)$$



Kuva 3: Tangentin suuntavektori

suuntainen.

Esimerkki Olkoon $t \in [1, 10]$ ja $\overline{x}(t) := (t, t^2, t^3)$. Kun $t = 2$, on tangentin suuntavektori

$$\bigl(x_1'(2), x_2'(2), x_3'(2)\bigr) = (1, 4, 12).$$

Katso kuva 3.

Palataan tasokäyriin. Jatkuva käyrä esitetään usein muodossa

$$f(x, y) = 0,$$

missä piste $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ kuuluu käyrälle ja funktio f on jossain $A \subset \mathbf{R}^2$ määritelty jatkuva funktio.

Esimerkki Nollakeskeinen R-säteinen ympyrä tasossa:

a) $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

b) $x(t) = R \cos t$

$y(t) = R \sin t, t \in [0, 2\pi].$

Vastaavasti, jos $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ jatkuva, niin joukko

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

on käyrä, kun $c \in \mathbf{R}$ ja f toteuttaa tiettyjä ehtoja. Näitä käyriä sanotaan funktion f tasa-arvokäyriksi.

Osoitamme seuraavaksi, että funktion f gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan:

Oletetaan, että $c \in \mathbf{R}$ on kiinteä ja että vastaavalla tasa-arvokäyrällä on parametriesitys

$$t \mapsto \big(x(t), y(t)\big), \quad t \in \Delta.$$

Oletetaan, että $x(t)$ ja $y(t)$ ovat derivoituvia. Koska

$$f\Big(x(t), y(t)\Big) = c \quad \forall\, t \in \Delta,$$

niin

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df\Big(x(t), y(t)\Big)}{dt} \\ &= (D_1 f)\Big(x(t), y(t)\Big)x'(t) + (D_2 f)\Big(x(t), y(t)\Big)y'(t) \\ &= (\nabla f)\Big(x(t), y(t)\Big) \cdot \Big(x'(t), y'(t)\Big). \end{aligned}$$

Näin ollen tangenttivektori on kohtisuorassa funktion f gradientti vektoria vastaan (jos $x'(0) \neq 0$ tai $y'(t) \neq 0$). Katso kuva 4.

4.1. Pinnat

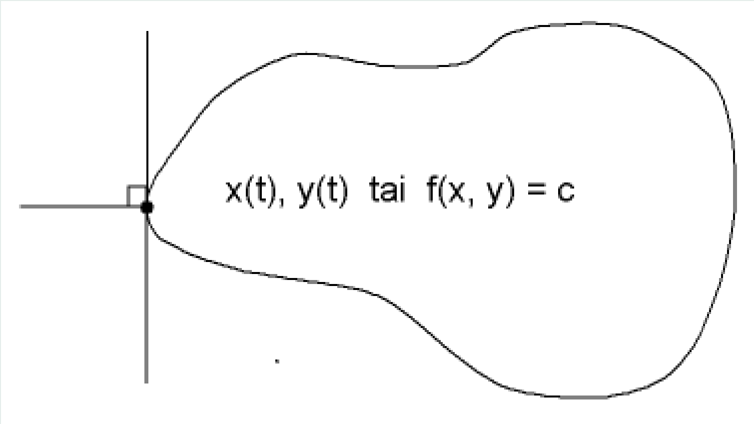
Pinnat

Yleinen määritelmä Avaruuden $\mathbf{R}^3$ suljettu osajoukko S on pinta, jos jokaisella $\overline{a} \in S$ on ympäristö V joka on homeomorfinen neliön $]0,1[\, \times \,]0,1[$ $(=: I^2)$ kanssa. On olemassa jatkuva bijektio $V \to I^2$.

Tarkastellaan nyt pintoja, jotka voidaan esittää muodossa

$$S := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\},$$

missä $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva, $A \subset \mathbf{R}^3$.



Kuva 4: Gradientti

Esimerkki Ellipsoidi

$$\underbrace{\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} - 1}_{=:f} = 0.$$

Katso kuva 5.

Esimerkki Jos $g : B \to \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}^2$, niin yhtälö

$$g(x, y) = z$$

määrittelee pinnan. Tämä voidaan näet kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{g(x, y) - z}_{=:f} = 0.$$

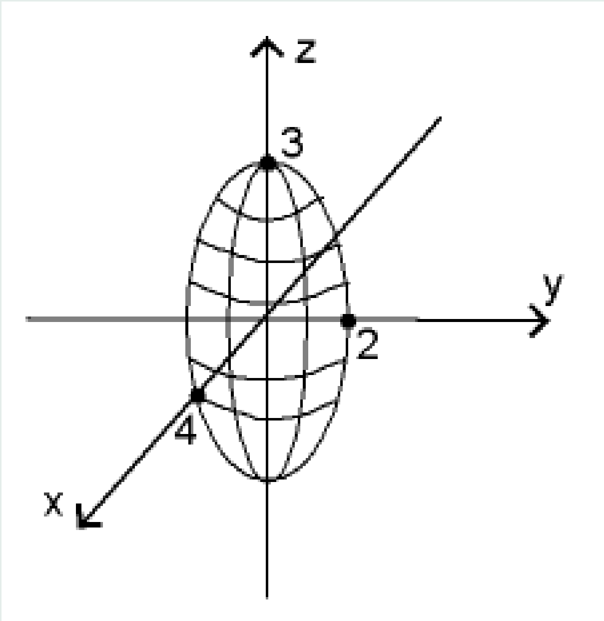
Pinta on nimeltään g:n kuvaaja.

4.2. Tangenttitasot

Tangenttitasot Olkoon S pinta

$$\{f(x, y, z) = 0\}.$$

Olkoon $(a, b, c) \in S$ pinnan piste. (Huom! $f(a, b, c) = 0$). Tarkoituksemme on johtaa tässä pisteessä olevan pinnan S tangenttitason yhtälö. Tarkastellaan käyrää $\Gamma \subset S$, joka



Kuva 5: Ellipsoidi

kulkee pisteen (a, b, c) kautta. Oletetaan, että Γ:lla on derivoituva parametriesitys

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, \quad t \in \Delta.$$

Olkoon $t_0 \in \Delta$ sellainen piste, että

$$\Big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\Big) = (a, b, c).$$

Koska $\Gamma \subset S$, niin

$$f\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) = 0 \, \forall \, t \in \Delta,$$

ja tästä saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)}{dt} \\ &= (D_1 t)\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)x'(t) + (D_2 t)\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)y'(t) \\ &\quad + (D_3 t)\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)z'(t) \\ &= (\nabla f)\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) \cdot \Big(x'(t), y'(t), z'(t)\Big). \end{aligned}$$

Kun $t = t_0$, saadaan

$$(\nabla f)(a, b, c) \cdot \Big(x'(t), y'(t), z'(t)\Big) = 0$$

joten kaikkien yllä mainittujen käyrien tangentit ovat kohtisuorassa gradienttia $(\nabla f)(a, b, c)$ vastaan.

Tangenttitason yhtälö

Merkitään

$$\overline{r}_0 := (a,b,c) = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}.$$

Olkoon $\overline{r} = (x,y,z)$ tangenttitason T piste. Siis

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in T \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{r} - \overline{r}_0 \perp \nabla f(a,b,c)\\ &\Longleftrightarrow \quad \nabla f(a,b,c)\cdot(\overline{r}-\overline{r}_0) = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad D_1 f(a,b,c)(x-a) + D_2 f(a,b,c)(y-b) + D_3 f(a,b,c)(z-c) = 0.\end{aligned}$$

Tämä on T:n yhtälö.

Esimerkki Määritellään pinta

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{x^2}{3^2} - 1 = 0.$$

Haluamme muodostaa tangenttitason yhtälön pisteessä $(a,b,c) = (2,1,\frac{3}{\sqrt{2}})$.

$$\begin{aligned}(\nabla f)(x,y,z) &= \left(\tfrac{x}{8}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{2z}{9}\right)\\ (\nabla f)(2,1,\tfrac{3}{\sqrt{2}}) &= \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{3}\right).\end{aligned}$$

T:n yhtälö

$$\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(z - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

eli

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}z - 2 = 0.$$

Esimerkki Olkoon $g : A \to \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}^2$, g differentioituva. Tarkastellaan pintaa S, joka on funktion g kuvaaja,

$$S = \{(x, y, z) \mid \underbrace{g(x, y) - z}_{=:f(x,y,z)} = 0\}$$

Nyt

$$(\nabla f)(a, b, c) = \Big((D_1 g)(a, b), (D_2 g)(a, b), -1\Big).$$

Pisteen $\big(a, b, g(a, b)\big)$ kautta kulkevan tangenttitason yhtälö on näin ollen

$$D_1 g(a, b)(x - a) + D_2 g(a, b)(b - y) = z - c.$$

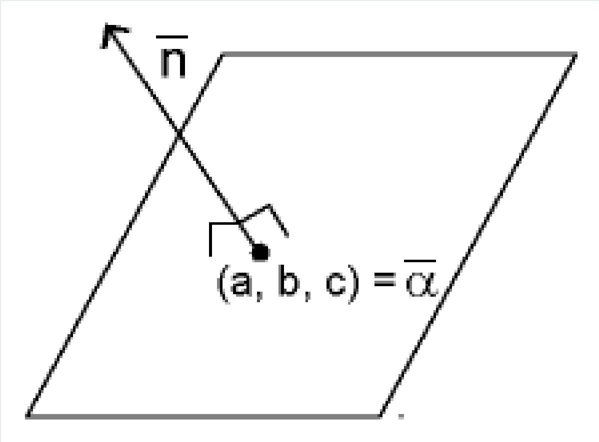
Tason T yhtälö $\mathbf{R}^3$:ssa yleisesti

T:n määrää:

- annettu piste $\overline{\alpha}$, joka kuuluu tasoon
- normaalivektori $\overline{n}$, joka on kohtisuorassa jokaista tasossa T kulkevaa suoraa vastaan.

Oletetaan että nämä annettu: Olkoon $\overline{x} \in \mathbf{R}^3$ mielivaltainen tason T piste. Silloin $\overline{x}$ toteuttaa yhtälön:

$$(\overline{x} - \overline{\alpha}) \cdot \overline{n} = 0$$



Kuva 6: Taso T

eli

$$x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 - \overbrace{\overline{\alpha} \cdot \overline{n}}^{\in \mathbf{R}} = 0.$$

Yleisesti siis tason yhtälö on muotoa

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

missä $A, B, C, D \in \mathbf{R}$.

Esimerkki Määritellään $\overline{\alpha} = (2, 2, 1)$ ja $\overline{n} = \overline{k} = (0, 0, 1)$. Nyt $n_1 = n_2 = 0, \overline{\alpha} \cdot \overline{n} = 1$. Yhtälö:

$$z = 1.$$

(Piste (x, y, z) kuuluu tasoon, jos ja vain jos $z = 1$).

Suoran yhtälö $\mathbf{R}^3$:ssa

Pisteen $\overline{\alpha}$ kautta kulkevan, vektorin $\overline{\beta}$ suuntaisen suoran L yhtälö on

$$\overline{x} = t\overline{\beta} + \overline{\alpha}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Toisin sanoen, $\overline{x} \in L$ jos ja vain jos on olemassa luku t siten, että (1) toteutuu.

Voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{x_1 - \alpha_1}{c_1} = \frac{x_2 - \alpha_2}{c_2} = \frac{x_3 - \alpha_3}{c_3}$$

jollekin $c_j \in \mathbf{R}$.

Etusivu
Sivu 17 / 17
Takaisin
Koko näyttö
Lopeta