# Analyyysi II

Jari Taskinen

19. huhtikuuta 2002

# Luku 5

## Sisältö

# 5 Väliarvolause

**Lause 5.1** Olkoon $A \subset\!\circ\, \mathbf{R}^2$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ differentioituva, ja olkoot $\overline{a}, \overline{b} \in A$ sellaisia pisteitä, että niiden yhdysjana sisältyy $A$:han. Tällöin on olemassa $\theta \in [0,1]$, jolle

$$f(\overline{b}) - f(\overline{a}) = \nabla f\Big(\overline{a} + \theta(\overline{b} - \overline{a})\Big) \cdot (\overline{b} - \overline{a}). \tag{1}$$

Huomautus.

1) Lause 5.1 (sivu 2) pätee, kun $\mathbf{R}^2$ muutetaan $\mathbf{R}^n$:ksi.

2) Jos merkitään $\overline{b} - \overline{a} = \overline{h}$, niin (1) pätee jos ja vain jos

$$f(\overline{a} - \overline{h}) - f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{a} + \theta\overline{h}) \cdot \overline{h}.$$

Lauseen 5.1 (sivu 2) todistus:

*Todistus.* Olkoon pisteiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ yhdysjana

$$J = \{\overline{a} + th \mid 0 \le t \le 1\}.$$

Määritellään derivoituva funktio $g : [0,1] \to \mathbf{R}$,

$$g(t) = f(\overline{a} + t\overline{h}) \quad \Big( = f(\overline{a} + t(\overline{b} - \overline{a})\Big).$$

Ketjusäännön mukaan

$$g'(t) = D_1 f(\overline{a} + t\overline{h})h_1 + D_2(\overline{a} + t\overline{h})h_2 = \nabla f(\overline{a} + t\overline{h}) \cdot \overline{h}.$$

Toisaalta väliarvolauseesta seuraa, että on olemassa $\theta \in\, ]0,1[$, jolle

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)(1 - 0) = g'(\theta).$$

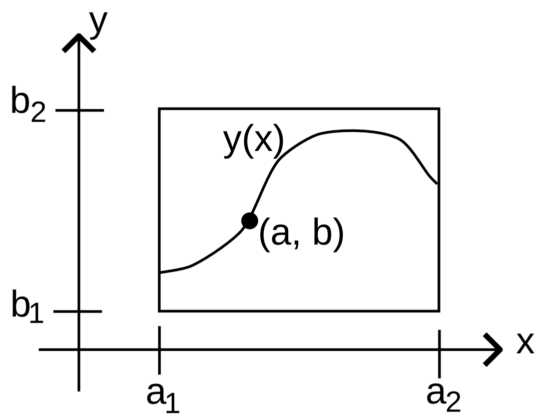
Saamme

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \nabla f(\overline{a} + \theta\overline{h}) \cdot \overline{h}.$$

□

**Esimerkki** Jos $|\,\nabla f(\overline{a})\,| \le M$ tarkastelualueessa (ainakin janalla $J$), missä $M$ on jokin positiivinen vakio, niin

$$\begin{aligned} \Big|\, f(\overline{b}) - f(\overline{a}) \Big| &= \Big|\nabla f(\overline{a} + \theta(\overline{b} - \overline{a})) \cdot (\overline{b} - \overline{a}) \Big| \\ &\le \Big|\nabla f(a + \theta(\overline{b} - \overline{a}))\Big|\,\Big|\overline{b} - \overline{a}\Big| \\ &\le M \Big|\overline{b} - \overline{a}\Big|. \end{aligned}$$




Kuva 1: Suorakulmio D

Kaavaa voidaan soveltaa fysiikan virhearvioinneissa: $\bar{b}$ on jokin mitattu suure, $\bar{a}$ sen tarkka arvo, $\left|\bar{b}-\bar{a}\right|$ mittausvirhe (josta on jonkinlainen käsitys olemassa). Lauseke $f(\bar{a})$ on etsitty suure, ja edellä mainitun kaavan mukaan $M\left|\bar{b}-\bar{a}\right|$ on yläraja arvio virheelle, joka tehdään, kun $f(\bar{a})$:n likiarvo $f(\bar{b})$ lasketaan mittaustuloksen $\bar{b}$ perusteella.

## 5.1 Implisiittifunktiolause

**Lause 5.2** Olkoon $A \subset\circ \mathbf{R}^2$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva. Olkoon $(a, b)$ piste, joka on $f$:n nollakohta, $f(a, b) = 0$. Oletetaan, että $D_2 f(a, b) \neq 0$. Tällöin on olemassa sellainen suorakulmio

$$D = \{(x, y) \mid a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2\} \subset \mathbf{R}^2,$$

$(a, b) \in D$, että jokaista $x \in \,]a_1, a_2[$ kohti yhtälöllä

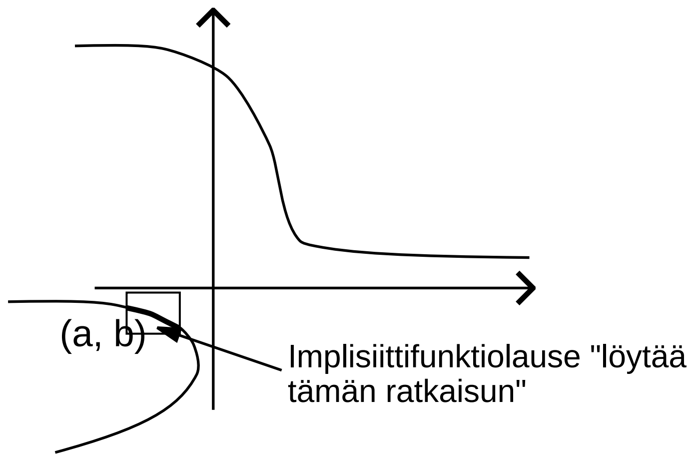
$$f(x, y) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y(x) \in \,]b_1, b_2[$. Funktio $x \mapsto y(x)$ on jakuvasti derivoituva välillä $]a_1, a_2[$.

Huomautus. Siis funktio $x \mapsto y(x)$ toteuttaa $f(x, y(x)) = 0, \ \forall\, x \in \,]a_1, a_2[$. Katso kuva 1.

**Esimerkki** Funktion

$$f(x, y) = y^5 + xy - 4 = 0$$




Kuva 2: Ratkaisupisteet

ratkaisupisteet tasossa: Katso kuva 2.

Yhtälön koko ratkaisu ei ole minkään yhden muuttujan funktion kuvaaja!

Lauseen 5.2 (sivu 3) todistus.

*Todistus.* Oletetaan että $D_2 f(a, b) > 0$. Koska $D_2 f$ on jatkuva, tästä seuraa että on olemassa $r > 0$ siten, että $D_2 f(x, y) > 0$, kun $(x, y) \in B(\overline{\alpha}, r)$ (tässä $\overline{\alpha} := (a, b)$). Tarkastellaan funktioita $y \mapsto f(a, y)$; yllä olevan nojalla se on aidosti kasvava $b$:n $n$-ympäristössä. Olkoon $b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ sellaisia, että

$$b - \frac{r}{2} < b_1 < b < b_2 < b + \frac{r}{2}.$$

Tällöin

$$f(a, b_1) < 0 = f(a, b) < f(a, b_2).$$

Koska $f$ jatkuva, niin on olemassa sellaiset luvut $a_1, a_2$,

$$a - \frac{r}{2} < a_1 < a < a_2 < a + \frac{r}{2},$$

että

$$f(x, b_1) < 0, \quad f(x, b_2) > 0,$$

kun $a_1 < x < a_2$. Olkoon $x \in ]a_1, a_2[$. Nyt pätee

1° $f(x, b_1) < 0$, $f(x, b_2) > 0$

2° $\varphi : y \mapsto f(x, y)$ on jatkuva välillä $]b_1, b_2[$

$3^\circ$ $\varphi : y \mapsto f(x,y)$ on aidosti kasvava.

Tästä seuraa, että on olemassa $y = y(x) \in \,]b_1, b_2[$, jolle $\varphi(y(x)) = 0$ eli $f(x, y(x)) = 0$. Todistus sille, että $y(x)$ on derivoituva, sivuutetaan. $\square$

Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset\!\circ\, \mathbf{R}^2$, $f(a,b) = 0$ ja $D_2 f(a,b) \neq 0$. Implisiittifunktiolauseesta siis seuraa, että yhtälöllä $f(x,y) = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu $y(x)$ jokaista $x \in \,]a_1, a_2[$ kohti. Funktio $x \mapsto y(x)$ on jatkuvasti derivoituva. Derivaatan $y'(x)$ laskeminen:

Pätee $f(x, y(x)) = 0$, joten

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = D_1 f(x, y(x)) \cdot 1 + (D_2 f)(x, y(x)) \cdot y'(x)$$

mistä seuraa

$$y'(x) = \frac{-D_1 f(a,b)}{D_2 f(a,b)}.$$

**Esimerkki** Tarkastellaan yhtälöä

$$xy - \sin(x+y) = 0 \tag{2}$$

Tällä on ratkaisu $x = y = 0$. Osoitetaan, että kyseessä oleva yhtälö määrittelee $y$:n $x$:n funktiona jossakin pisteen nolla ympäristössä ja lasketaan $y'(0)$.

Ratkaisu. Pätee $f(0,0) = 0$ (Lause 5.2 (sivu 3) kun $a = 0, b = 0$) ja $D_2 f(x,y) = x - \cos(x+y)$, $D_2 f(0,0) = -1 \neq 0$. Lause 5.2 (sivu 3) soveltuu, joten yhtälö (2) määritteöee $y$:n $x$:n funktiona.

$$y'(0) = \frac{D_1 f(0,0)}{D_2 f(0,0)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

ja

$$D_1 f = y - \cos(x+y).$$

Tapaus, jossa implisiittilause EI toimi:

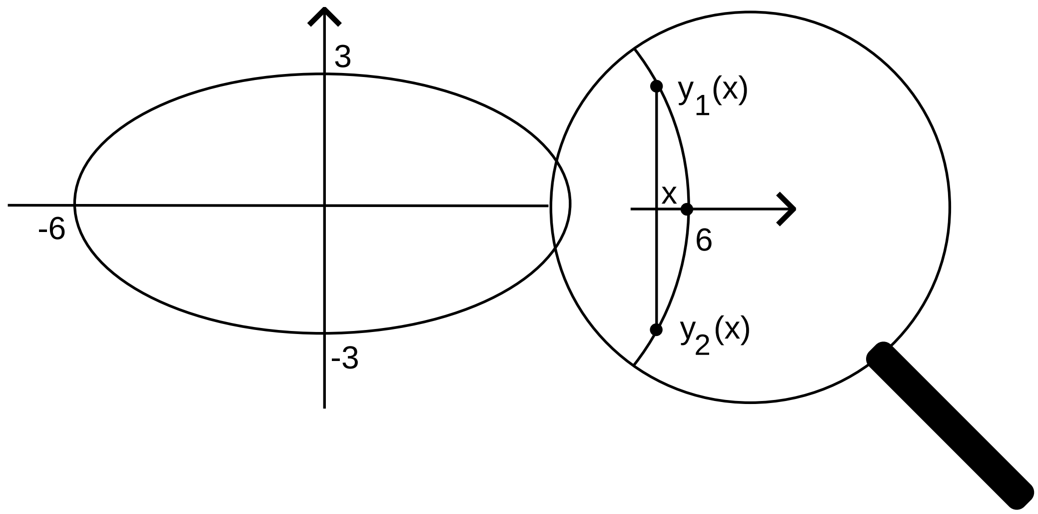
Tarkastellaan yhtälöä

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 9 = 0 \tag{3}$$

pisteessä $(x,y) = (6,0)$. Nyt

$$D_2 f(x,y) = 2y, \quad D_2 f(6,0) = 0,$$

joten implisiittifunktiolauseen oletukset eivät ole voimassa.




Kuva 3: Ellipsi

Huomatus! Yhtälön (3) ratkaisupisteet muodostavat ellipsin tasoon. Katso kuva 3. Eli $y$ ei ole yksikäsitteinen $x$:n funktio.

**Lause 5.3** Olkoon $A \subset\circ \mathbf{R}^{n+1}$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle pisteessä $(\overline{a}, b) \in A \subset \mathbf{R}^{n+1}$

$$f(\overline{a}, b) = 0, \quad D_{n+1}(\overline{a}, b) \neq 0.$$

Tällöin on olemassa $\overline{a}$:n ympäristö $B(\overline{a}, r) \subset \mathbf{R}^n$ ja avoin väli $]b_1, b_2[\ \ni b$ siten, että jokaisella $\overline{x} \in B(\overline{a}, r)$ yhtälöllä $f(\overline{x}, y) = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu $y(\overline{x}) \in\ ]b_1, b_2[$.

Derivaatoille pätee:

$$D_i y(\overline{x}) = -\frac{D_i f(\overline{x}, y(\overline{x}))}{D_{n+1} f(\overline{x}, y(\overline{x}))} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Lausetta 5.3 (sivu 6) voidaan käyttää, kun halutaan varmistaa, että yhtälön $f(x, y, z) = 0$ ratkaisut muodostavat pinnan $\mathbf{R}^3$:ssa (vertaa luku 4).

**Esimerkki** Yhtälö

$$f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2+z^2} = 0$$

määrittelee $z$:n muuttujien $x$ ja $y$ funktiona eräässä $(0, 0, 0)$:n ympäristössä, sillä

$$f(0, 0, 0) = 0 \cdot e^0 = 0,$$

eli yhtälö toteutuu. Nyt

$$\begin{aligned} D_3 f(x,y,z) &= e^{x^2+y^2+z^2} + z \cdot 2ze^{x^2+y^2+z^2} \\ D_3 f(0,0,0) &= 1 \neq 0 \\ D_1 f(x,y,z) &= 2xze^{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}$$

Siis voidaan ratkaista $z = z(x,y)$, kun $(x,y)$ on pisteen $(0,0)$ jossain ympäristössä. Derivaatalle saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = D_1 z(0,0) = -\frac{D_1 f(0,0,0)}{D_3 f(0,0,0)} = -\frac{0}{1} = 0.$$