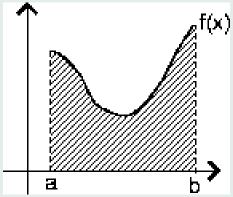
Analyysi II

Jari Taskinen

12. syyskuuta 2002

Luku 7

Sisältö



Kuva 1: Pinta-ala

7. Käyräintegraalit

Käyräintegraalit

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva. Sen integraalifunktiota $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ merkitään

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

ja sille pätee kaava $\frac{dF}{dx} = f$. Geometrinen tulkinta: Kuvan 1 väritetyn alueen pinta-ala on $\int_a^b f(x)\,dx$.

Olkoon $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ (tai $\mathbf{R}^n$) jatkuva. Joukko $\varphi([a, b]) \subset \mathbf{R}^2$ on käyrä, jota merkitään esimerkiksi Γ. Kuvaus φ on Γ:n parametriesitys.

Jos käyrällä on parametriesitys, joka on *injektio*, sitä sanotaan *kaareksi*. Valitsemalla toinen päätepiste *alkupisteeksi* ja toinen *loppupisteeksi*, saadaan *suunnistettu kaari*.

Sisältö:

Kaari on *säännöllinen*, jos sillä on jatkuvasti derivoituva parametriesitys.

Määritelmä 7.1 Olkoon $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ säännöllinen suunnistettu kaari ja olkoon $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ jatkuvasti derivoituva parametriesitys (siis $\Gamma = \varphi([a,b])$). Jos $f : \Gamma \to \mathbf{R}$ ja $g : \Gamma \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia, niin määritellään

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dx + g\,dy := \int\limits_a^b \Big(f(\varphi(t))\varphi_1'(t) + g(\varphi(t))\varphi_2'(t) \Big)\,dt.$$

Yleisesti:

$$\Gamma \subset \mathbf{R}^n, \quad \gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n, \quad \gamma([a,b]) = \Gamma, \quad \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

jatkuvasti derivoituva. Olkoon $f_j : \Gamma \to \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Määritellään

$$\int\limits_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n := \int\limits_a^b \Big(f_1(\gamma(t))\gamma_1' + \cdots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t) \Big)\,dt$$

Merkitään myös

$$\int\limits_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n := \int\limits_{\Gamma} \overline{f} \cdot d\overline{r},$$

missä $f := (f_1, \ldots, f_n)$ ja $d\overline{r} := (dx_1, \ldots, dx_n)$.

Lause Määritelmän 7.1 (sivu 3) käyräintegraali ei riipu Γ:n parametriesityksestä.

Todistus. Sivuutetaan. $\square$

Esimerkki 1 Laske

$$\int_\Gamma x^2 dx + xy\,dy,$$

kun Γ on yksikköympyrän kaari pisteestä $(1,0)$ pisteeseen $(0,1)$.

Ratkaisu. Käytetään Γ:lle tuttua parametrisointia

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \cos t \\ y = \varphi_2(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Tällöin

$$\begin{array}{rclrcl} \varphi_1'(t) & = & -\sin t, & \varphi_2'(t) & = & \cos t \\ dx & = & \varphi_1'(t)dt, & dy & = & \varphi_2'(t)dt \end{array}$$

ja

$$\int_\Gamma x^2 dx + xy\,dy = \int_0^{\pi/2} \Big(\cos^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t \sin t \cos t\Big)\,dt = 0.$$

Toinen mahdollisuus on käyttää Γ:lle parametriesitystä

$$\begin{cases} x & = & -t \\ y & = & \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1,0]\,.$$

Tällöin $\varphi : [-1,0] \to \mathbf{R}^2$ ja

$$\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) = (-t, \sqrt{1-t^2}).$$

Huomaa, että

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{t^2 + (1 - t^2)} = 1.$$

Tällä parametriesityksellä

$$\int\limits_{\Gamma} x^2 dx + xy\, dy = \int\limits_{-1}^{0} \left(t^2 \cdot (-1) + (-t)\sqrt{1 - t^2} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} \right) dt = \int\limits_{-1}^{0} (-t^2 + t^2)\, dt = 0,$$

sillä $\varphi_1'(t) = -1$ ja

$$\varphi_2'(t) = \frac{1}{2}(1 - t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2t) = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Käyräintegraalin käsite liittyy läheisesti fysiikkaan.

Esimerkki Tarkastellaan massapistettä, joka liikkuu pitkin $\mathbf{R}^3$:n käyrää Γ. Kappaleeseen vaikuttaa voima

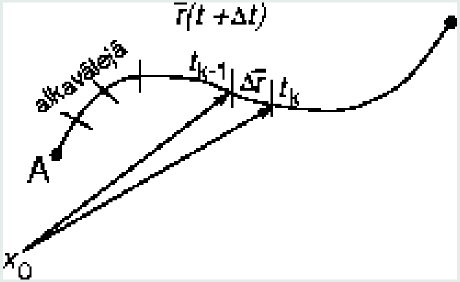
$$\overline{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\overline{i} + F_2(x, y, z)\overline{j} + F_3(x, y, z)\overline{k}$$

missä $\overline{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\overline{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Massapisteen sijainti ajan t funktiona (aikaväli on $a \leq t \leq b$) on

$$\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},$$

katso kuva 2. Kun aika muuttuu (vähän) hetkestä t hetkeen $t + \Delta t$, massapisteen paikan



Kuva 2: Massapisteen sijainti

muutos on

$$\begin{aligned}\Delta\overline{r} &= \overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)=\Big(x(t+\Delta t)-x(t), y(t+\Delta t)-y(t), z(t+\Delta t)-z(t)\Big)\\ &\cong \Big(x'(t)\Delta t, y'(t)\Delta t, x'(t)\Delta t\Big)=\Delta t r'(t).\end{aligned}$$

Tällä välillä tehty työ on

$$\Delta W \cong \overline{F}(\overline{r}(t))\cdot\Delta\overline{r}=\overline{F}(\overline{r}(t))\cdot r'(t)\Delta t.$$

Halutaan laskea työ, joka tehdään, kun massapiste siirtyy pisteestä A pisteeseen B. Jaetaan aikaväli $[a,b]$ osaväleihin $[t_{k-1},t_k]$, $k=1,\ldots,n$. Työksi osavälillä $[t_{k-1},t_k]$ saadaan

$$\Delta W \cong \overline{F}(\overline{r}(t_{k-1}))\cdot r'(t_{k-1})(t_k-t_{k-1}).$$

Koko työ on

$$\Delta W \cong \sum_{k=1}^{n} \overline{F}(\overline{r}(t_{k-1})) \cdot r'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

joka suppenee aikajaon tihentyessä kohti integraalia

$$\int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\, dt.$$

Tässä

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\, dt &= \int_a^b \Big(F_1(r(t))r_1'(t) + F_2(r(t))r_2'(t) + F_3(r(t))r_3'(t)\Big)\, dt \\ &= \int_\Gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3\, dz, \end{aligned}$$

eli tehty työ on edellämainitun käyräintegraalin arvo.

Käyräintegraalit voidaan määritellä helposti myös yleisemmille integroimisteille. Olkoot Γ_i ja Γ_k suunnistettuja säännöllisiä kaaria siten, että Γ_i:n loppupiste on Γ_{i+1}:n alkupiste. Silloin Γ_i:t muodostavat paloittain säännöllisen tien Γ. ($\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$.) Määritellään

$$\int_\Gamma f_1 dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n := \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} f_1 dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n.$$

Esimerkki Tutkitaan integraalia

$$\int_\Gamma y\, dx - x\, dy + dz.$$

a) Γ on jana jonka alkupiste on $(1,0,0)$ ja loppupiste $(0,1,1)$. Γ:n parametrisointi:

$$\varphi(t) = (1-t)(1,0,0) + t(0,1,1) = (1-t, t, t) =: (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad t \in [0,1]\,.$$

Nyt

$$\varphi_1'(t) = -1, \quad \varphi_2'(t) = 1 = \varphi_3'(t)$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma y\,dx - x\,dy + dz &= \int_0^1 \Big(\varphi_2(t)\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t) + \varphi_3'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^1 \Big(t\cdot(-1) - (1-t)\cdot 1 + 1\Big)\,dt \\
&= \int_0^t -t - 1 + t + 1\,dt = 0.
\end{aligned}$$

b) Γ on ruuviviiva

$$\Gamma = \left\{(\cos t, \sin t, \frac{2}{\pi}t) \mid t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \cos t, & \varphi_2(t) &= \sin t, & \varphi_3(t) &= \tfrac{2}{\pi}t \\
\varphi_1'(t) &= -\sin t, & \varphi_2'(t) &= \cos t, & \varphi_3'(t) &= \tfrac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} y dx - x dy + dz &= \int\limits_0^{\pi/2} \Big(\varphi_2(t)\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)\varphi_2'(t) + \varphi_3'(t) \Big)\, dt \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} \Big(-\sin^2 t - \cos^2 t + \tfrac{2}{\pi} \Big)\, dt \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} (-1 + \tfrac{2}{\pi}) dt = -\tfrac{2}{\pi} + 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

7.1. Vektorikentän potentiaali

Vektorikentän potentiaali

Joukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on alue, jos se on avoin ja yhtenäinen. (Joukko on yhtenäinen, jos sitä ei voi esittää kahden epätyhjän avoimen, erillisen joukon yhdisteenä).

Määritelmä 7.2 Olkoon $A \subset\!\circ\; \mathbf{R}^2$ alue ja $f : A \to \mathbf{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ vektorikenttä. Jos on olemassa differioituva funktio $u : A \to \mathbf{R}$ (skalaariarvoinen!) siten, että $\nabla u = f$ (eli $f_1 = D_1 u$, $f_2 = D_2 u$) niin u on funktion f potentiaali. Sanotaan myös, että lauseke

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

on *eksakti* ja u on sen *integraalifunktio*.

Huomautus 1 Kaikilla vektorikentillä ei ole olemassa potentiaalia.

Huomautus 2 Potentiaali on yksikäsitteinen lisättävää vakiota vaille: Jos u on funktion

f potentiaali, niin $v : A \to \mathbf{R}$ on funktion f potentiaali jos ja vain jos on olemassa vakio $c \in \mathbf{R}$ siten, että $v = u + c$.

Esimerkki 1 Olkoon

$$f(x,y) = (3x^2y + \cos(x+y), x^3 + \cos(x+y)), \quad f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2.$$

Tällöin

$$u(x,y) = x^3y + \sin(x+y),$$

ja pätee $\nabla u = f$.

Esimerkki 2 Olkoon

$$f(x,y) = (10x^2, \cos x + e^y).$$

Tällä ei ole potentiaalifunktiota. Tähän tapaukseen palaamme myöhemmin.

Edellä oleva Määritelmä 7.2 (sivu 9) toimii myös avaruudessa $\mathbf{R}^n$: Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^n$, missä $A \subset \mathbf{R}^n$ on alue. Tällöin $u : A \to \mathbf{R}$ on funktion f potentiaali, jos $\nabla u = f$.

Esimerkki Olkoon

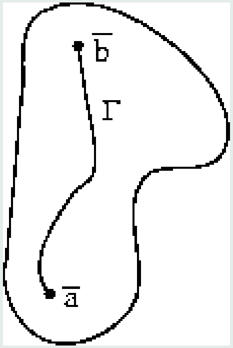
$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right), \quad f : \mathbf{R}^3 \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbf{R}^3,$$

missä

$$\begin{aligned} \overline{r} &= (x,y,z) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, \\ r &= |\,\overline{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Voidaan kirjoittaa $f(x,y,z) = \frac{\overline{r}}{r^3}$. Tällä on potentiaali $u(x,y,z) = -\frac{1}{r}$, sillä

$$D_1 u = \frac{\partial}{\partial x}\left(-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r^3} = f_1 \text{ jne.}$$



Kuva 3: Kaari Γ

Lause 7.3 Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^n$ jatkuva vektorikenttä, $A \subset\circ\, \mathbf{R}^n$ alue ja $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Olkoon $u : A \to \mathbf{R}$ funktion f potentiaali. Jos $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in A$ ja $\Gamma \subset A$ paloittain säännöllinen tie alkupisteenä $\overline{a}$ ja loppupisteenä $\overline{b}$, niin

$$\int_\Gamma f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n = u(\overline{b}) - u(\overline{a}).$$

Katso kuva 3.

Todistus. Oletetaan aluksi, että Γ on säännöllinen kaari, toisin sanoen, on olemassa jatkuvasti derivoituva parametriesitys

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n.$$

Ketjusäännöstä seuraa, että

$$(u \circ \varphi)'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_i u)\,(\varphi(t))\,\varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(\varphi(t))\,\varphi_i'(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}.$$

Käyräintegraalin määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f_1 dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n &= \int_\alpha^\beta [f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + f_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)]\;dt \\ &= \int_\alpha^\beta (u \circ \varphi)'(t)\,dt = [u \circ \varphi]_{t=\alpha}^{\beta} \\ &= u(\varphi(\beta)) - u(\varphi(\alpha)) = u(\bar{b}) - u(\bar{a}). \end{aligned}$$

$\square$

Jos Γ on säännöllinen tie, jaetaan tarkastelu säännöllisiin osakaariin.

Esimerkki Laske

$$\int_\Gamma \underbrace{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}_{(*)},$$

kun Γ on ruuviviiva,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& \cos t \\ y &=& \sin t \\ z &=& t \end{array} \right. , \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Alkupiste on $(1, 0, 0)$ ja loppupiste $(1, 0, 2\pi)$, Ratkaisu. Määritellään $u(x,y,z) = xyz$. Tällöin

$$\nabla u(x,y,z) = (yz, xz, xy).$$

Siten $(*)$ on eksakti funktio ja Lauseen 7.3 (sivu 11) nojalla

$$\int_\Gamma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = u(1,0,2\pi) - u(1,0,0) = 1\cdot 0\cdot 2\pi - 1\cdot 0\cdot 0 = 0.$$

Lause 7.4 Olkoon $A \subset\circ\, \mathbf{R}^2$ ympyrä (kiekko), $f : A \to \mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituva ja $f = (f_1, f_2)$. Tällöin funktiolla f on potentiaali jos ja vain jos

$$D_1 f_2 = D_2 f_1 \qquad \text{(integroituvuus ehto).}$$

Huomautus Lause 7.4 (sivu 13) ei päde kaikilla alueille A; se voidaan kyllä yleistää niin sanotuille yhdesti yhtenäisille alueille. Katso kuva 4.

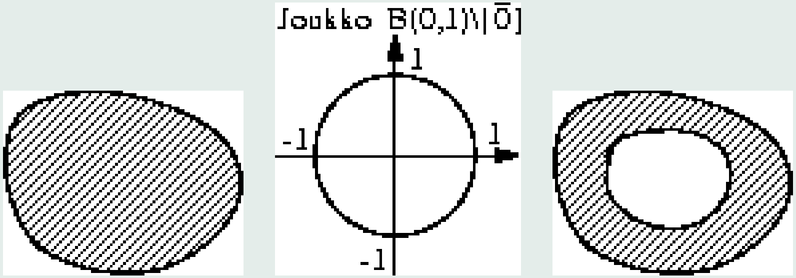
Lauseen 7.4 (sivu 13) todistus. Väite: Funktiolla f on potentiaali jos ja vain jos $D_2 f_1 = D_1 f_2$.

Todistus. 1. Oletetaan, että funktiolla f on potentiaali u, eli

$$\begin{cases} D_1 u &= f_1 \\ D_2 u &= f_2 \end{cases}.$$

Derivointijärjestys on vaihdannainen, joten

$$\begin{aligned} D_1(D_2 u) &= D_2(D_1 u) \\ \Rightarrow D_1 f_2 &= D_2 f_1. \end{aligned}$$



Yhdesti yhtenäinen   Yhtenäisiä, mutta eivät yhdesti yhtenäisiä

Kuva 4: Yhdesti yhtenäisyys

2. Oletetaan, että $D_2 f_1 = D_1 f_2$. Merkitään pisteellä (a, b) alueen A keskipistettä. Olkoon nyt $(x, y) \in A$ mielivaltainen piste. Määritellään

$$u(x, y) := \int_b^y f_2(a_1, x_2)\, dx_2 + \int_a^x f_1(x_1, y)\, dx_1 \left(= \int_\Gamma f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 \right).$$

Lasketaan

$$D_1 u(x, y) = \underbrace{D_1 \int_b^y f_2(a, x_2)\, dx_2}_{=0} + D_1 \int_a^x f_1(x_1, y)\, dx_1 = f_1(x, y),$$

ja

$$\begin{aligned}
D_2u(x,y) &= D_2\int_b^y f_2(a,x_2)\,dx_2 + D_2\int_a^x f_1(x_1,y)\,dx_1 \\
&= f_2(a,y) + \int_a^x D_2f_1(x_1,y)\,dx_1 \\
&= f_2(a,y) + \int_a^x D_1f_2(x_1,y)\,dx_1 \\
&= f_2(a,y) + [f_2(x_1,y)]_{x_1=a}^{x} \\
&= f_2(a,y) + f_2(x,y) - f_2(a,y) \\
&= f_2(x,y).
\end{aligned}$$

Perustelu sille, että tässä voidaan derivoida integraalimerkin alla, sivuutetaan. □

Esimerkki Laske

$$\int_\Gamma \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy,$$

kun

$$\Gamma = \left\{(x,y) \mid x=\cos t, y=\sin t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Tien alkupiste on $(1,0)$ ja loppupiste $(0,1)$. Merkitään

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \tfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} \\
f_2(x,y) &= \tfrac{e^y}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
D_2f_1(x,y) &= D_2\left[\tfrac{2x}{(1+x^2)^2} - \tfrac{2xe^y}{(1+x^2)^2}\right] = -\tfrac{2x}{(1+x^2)^2}e^y \\
D_1f_2(x,y) &= D_1\tfrac{e^y}{1+x^2} = -\tfrac{e^y\cdot 2x}{(1+x^2)^2},
\end{aligned}$$

eli $D_2 f_1 = D_1 f_2$. (Yhtälö $D_2 f_1 = D_1 f_2$ pätee koko tasossa $\mathbf{R}^2$, esimerkiksi joukossa $B(0, 10^6)$.) Siten vektorikentällä $f := (f_1, f_2)$ on potentiaali u ja Lauseen 7.3 (sivu 11) mukaan

$$u(0,1) - u(1,0) = \int_\Gamma f_1\, dx + f_2\, dy.$$

Tämä voidaan tulkita myös niin, että integraalin arvo ei riipu integroimistiestä. Valitsemme uuden integroimistien $\widetilde{\Gamma}$ siten, että kuljetaan pisteestä $(0,1)$ pisteeseen $(1,0)$ koordinaattiakselien suuntaisia janoja pitkin origon kautta. Lasketaan

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f_1\, dx + f_2\, dy = \int_{\Gamma_1} f_1\, dx + f_2\, dy + \int_{\Gamma_2} f_1\, dx + f_2\, dy$$

Tässä $\Gamma_1 : \varphi(t) = (1-t, 0)$, $t \in [0,1]$ ja $\varphi_1' = -1, \varphi_2' = 0$, joten

$$\int_{\Gamma_1} f_2\, dy = 0 \quad \text{ja} \quad f_1(x,0) = \frac{2x(1-e^0)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Siten

$$\int_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2:n parametriesitys: $\varphi(t) = (0,t)$, $t \in [0,1]$ ja $\varphi_1' = 0, \varphi_2' = 1$.

$$\int_{\Gamma_2} \ldots = \int_0^1 \frac{e^t}{1+0} \varphi_2'(t)\, dt = \int_0^1 e^t\, dt = e - 1.$$

Vastaus on siis -1.

Esimerkki Lause 7.4 (sivu 13) ei päde kaikille alueille A!

Olkoon

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right), \quad f : A \to \mathbf{R}^2,\ A = \mathbf{R}^2 \setminus \{0,0\}.$$

Edelleen

$$\begin{aligned} D_2 f_1 &= \tfrac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ D_1 f_2 &= \tfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

siten $D_2 f_1 = D_1 f_2$ joukossa A. Tarkastellaan integraalia

$$\int f_1\, dx + f_2\, dy,$$

kun

$$\Gamma = \{(x,y) \mid x = \cos t, y = \sin t; t \in [0, 2\pi]\}$$

(eli Γ on yksikköympyrän reuna).

Jos funktiolla f on potentiaali u koko tasossa $\mathbf{R}^2$, niin Lauseen 7.3 (sivu 11) nojalla

$$\int f_1\, dx + f_2\, dy = u(\overline{b}) - u(\overline{a}) = 0,$$

koska Γ:n loppupiste $\overline{b}$ ja Γ:n alkupiste $\overline{a}$ ovat sama $(1,0)$.

Lasketaan käyräintegraali suoraan:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad \varphi_1' = -\sin t, \varphi_2' = \cos t.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f_1\,dx + f_2\,dy &= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{-\sin t}{1}(-\sin t) + \tfrac{\cos t}{1}\cdot\cos t\right]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 t + cos^2 t\right]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Lause 7.4 (sivu 13) ei näin ollen voi päteä.

Huomautus Jos Γ on suljettu (umpinainen) integroimistie (alku- ja loppupiste samat), niin

$$\int_\Gamma f_1\,dx + f_2\,dy$$

(f kuten edellä) on "2π kertaa Γ:n kierrosluku nollan suhteen".

Lause 7.5 Olkoon A ympyrä, $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva. Funktiolla f on potentiaali $u : A \to \mathbf{R}$, jos ja vain jos

$$\int_\Gamma f_1\,dx + f_2\,dy = 0, \quad \text{(pyörteettömyys)}$$

kun Γ on mielivaltainen umpinainen paloittain säännöllinen tie.

Potentiaalin laskeminen

Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^2$ vektorikenttä, jolla on potentiaali $u : A \to \mathbf{R}$. Lauseesta 7.3 (sivu 11) seuraa

$$u(x,y) = -u(a,b) + \int_{\Gamma} f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2,$$

missä $(a,b) \in A$ on kiinteä ja $\Gamma \subset A$ on paloittain säännöllinen tie, alkupisteenä (a,b) ja loppupisteenä (x,y).

Jos esimerkiksi valitaan Γ:ksi murtoviiva $(a,b) \to (a,y) \to (x,y)$ sekä $u(a,b) = 0$, saadaan u:n arvo pisteessä (x,y) kaavasta

$$u(x,y) = \int_b^y f_2(a,x_2)\,dx_2 + \int_a^x f_1(x_1,y)\,dx_1.$$

Vaihtoehtoisesti, jos Γ on murtoviiva $(a,b) \to (x,b) \to (x,y)$, saadaan

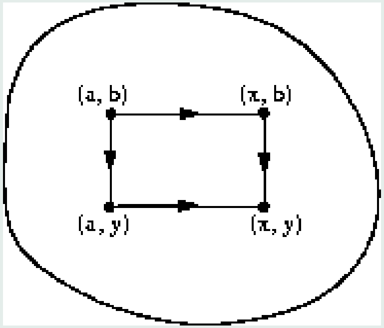
$$u(x,y) = \int_a^x f_1(x_1,b)\,dx_1 + \int_b^y f_2(x,x_2)\,dx_2.$$

Katso kuva 5.

Esimerkki Laske vektorikentän

$$f := (5x^4y^4, 4x^5y^3 + 1)$$

Sisältö:



Kuva 5: Murtoviiva

potentiaali.

Ratkaisu. 1) Tarkastellaan, onko potentiaalia: Pätee

$$D_1 f_2(x,y) = 20x^4y^3 = D_2 f_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

joten potentiaali u on olemassa koko tasossa.

2) Valitaan $u(0,0)=0$ ja $\Gamma : (0,0) \to (x,0) \to (x,y)$. Saadaan

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x f_1(x_1,0)\,dx_1 + \int_0^y f_2(x,x_2)\,dx_2 \\ &= \int_0^x 5x_1^4 \cdot 0\,dx_1 + \int_0^y (4x^5x_2^3+1)\,dx_2 \\ &= 0 + \left[x^5x_2^4 + x_2\right]_{x_2=0}^{y} = x^5y^4 + y. \end{aligned}$$

Tarkistus:

$$\nabla u(x,y) = (5x^4y^4, 4x^5y^3 + 1).$$

Potentiaalin laskeminen avaruudessa R^n

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ avoin yhtenäinen, $f : A \to \mathbf{R}^n$ vektorikenttä. Funktio $u : A \to \mathbf{R}$ on potentiaali, jos

$$\nabla u = f \quad \text{eli} \quad D_j u = f_j, \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Lauseen 7.4 (sivu 13) integroituvuusehto avaruudessa $\mathbf{R}^n$:

$$D_i f_j = D_j f_i, \qquad \forall\, i,j = 1, \ldots, n, \qquad i \neq j.$$

Esimerkki Olkoon

$$f(x,y,z) = \Big(y - \sin(x+z), x, -\sin(x+z)\Big).$$

Integroituvuus ehdot

$$\begin{aligned} D_1 f_2 &= 1 = D_2 f_1 \\ D_1 f_3 &= -\cos(x+z) = D_3 f_1 \\ D_2 f_3 &= 0 = D_3 f_2 \end{aligned}$$

toteutuvat, joten

$$u(x,y,z) = xy + \cos(x+z).$$

Tapauksessa $n = 3$ merkitään

$$\begin{aligned}\nabla \times f \quad &:= \quad \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} D_2 & D_3 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} + \bar{j} \begin{vmatrix} D_1 & D_3 \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \\ &= \quad (D_2 f_3 - D_3 f_2)\bar{i} + (D_1 f_3 - D_3 f_1)\bar{j} + (D_1 f_2 - D_2 f_1)\bar{k}.\end{aligned}$$

Integroituvuusehto pätee jos ja vain jos $\nabla \times f = \bar{0}$ alueessa A.

Sanomme, että vektorikenttä f on pyörteetön, jos

$$\int_\Gamma f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n = 0$$

jokaiselle umpinaiselle Γ.

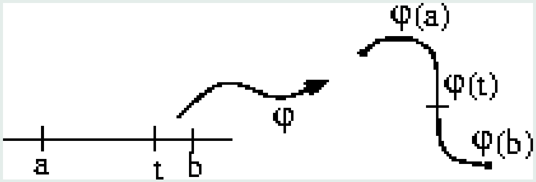
7.2. Integrointi kaaren pituuden suhteen

Integrointi kaaren pituuden suhteen

Olkoon $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ säännöllinen kaari, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a, b] \to \mathbf{R}$ kaaren Γ jatkuvasti derivoituva parametriesitys. Kaaren Γ pituus on

$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt.$$

Katso kuva 6.



Kuva 6: Kaaren pituus

Väliä $[a, t]$ vastaava kaaren pituus

$$s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \varphi_2'(\tau)^2}\, d\tau.$$

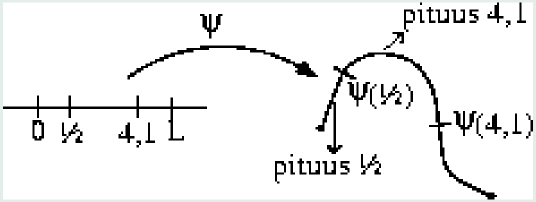
Funktio on $\lambda : [a, b] \to [0, L]$ jatkuvasti derivoituva bijektio, koska

$$\lambda'(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} > 0.$$

$\lambda(t)$ on kaaren pituus pisteestä $\varphi(a)$ pisteeseen $\varphi(t)$ ja λ on aidosti kasvava.

Määritellään $\psi := (\psi_1, \psi_2) : [0, L] \to \mathbf{R}^2$, $\psi(s) = \varphi \circ \lambda^{-1}(s)$. Funktion ψ on mittatarkka parametrisaatio polulle Γ, katso kuva 7.

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \varphi_1(\lambda^{-1}(s)) = \psi_1(s) \\ y = \varphi_2(t) = \varphi_2(\lambda^{-1}(s)) = \psi_2(s) \end{cases}, \quad 0 \le s \le L.$$



Kuva 7: Parametrisaatio polulle Γ

Olkoon $f : \Gamma \to \mathbf{R}$ jatkuva. Määritellään funktion f integraali kaaren pituuden suhteen

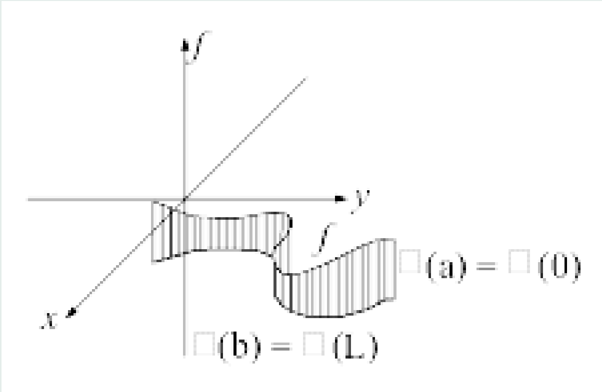
$$\int_{\Gamma} f\,ds := \int_{0}^{L} f(\psi(s))\,ds.$$

Laskujen helpottamiseksi suoritetaan muuttujan vaihto:

$$\begin{aligned} s &= \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \varphi_2'(\tau)^2}\,d\tau, \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} := \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}. \end{aligned}$$

Saadaan

$$\int_{\Gamma} f\,ds = \int_{0}^{L} f(\psi(s))\,ds = \int_{a}^{b} f(\varphi(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\,dt.$$



Kuva 8:

Integraalin geometrinen tulkinta: se on funktion f kuvaajan ja $x - y$-tasossa olevan käyrän Γ väliin jäävän liuskan pinta-ala. Katso kuva 8.

Avaruudessa $\mathbf{R}^3$:

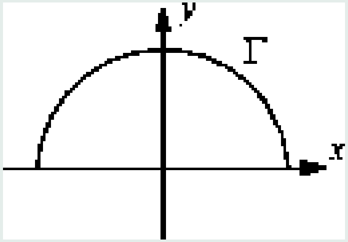
$$\int\limits_\Gamma f\,ds = \int\limits_a^b f(\psi(s))\,ds = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\,dt,$$

missä $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, on Γ:n parametriesitys.

Esimerkki (Katso kuva 9.)

Sisältö:

Etusivu
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Sivu 25 / 27
Takaisin
Koko näyttö
Lopeta



Kuva 9:

Jos kaarella Γ on massa, jonka tiheys $\rho(x, y)$, niin painopisteen koordinaatit ovat:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\int\limits_\Gamma x\rho(x,y), ds}{\int\limits_\Gamma \rho(x,y)\, ds}, \\
Y &= \frac{\int\limits_\Gamma y\rho(x,y), ds}{\int\limits_\Gamma \rho(x,y)\, ds}.
\end{aligned}
$$

Esimerkki Oletetaan, että ρ on vakio=: ρ ja Γ on puoliympyrä

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}.$$

Reunalla Γ on parametriesitys

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& \cos t =: \varphi_1(t) \\ y &=& \sin t =: \varphi_2(t) \end{array} \right. , \quad t \in [0, \pi]\,.$$

Sisältö:

Lasketaan

$$\int_\Gamma \rho(x,y)\,ds = \int_0^\pi \rho_0 \sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\,dt = \rho_0\pi$$

ja

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma x\rho(x,y)\,ds &= \int_0^\pi \rho_0\varphi_1(t)\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\,dt = \int_0^\pi \rho_0\cos t\,dt = 0 \\
\int_\Gamma y\rho(x,y)\,ds &= \int_0^\pi \rho_0\sin t\,dt = 2\rho_0
\end{aligned}$$

eli

$$X = \frac{0}{\pi\rho_0} = 0, \quad Y = \frac{2\rho_0}{\pi\rho_0} = \frac{2}{\pi}.$$