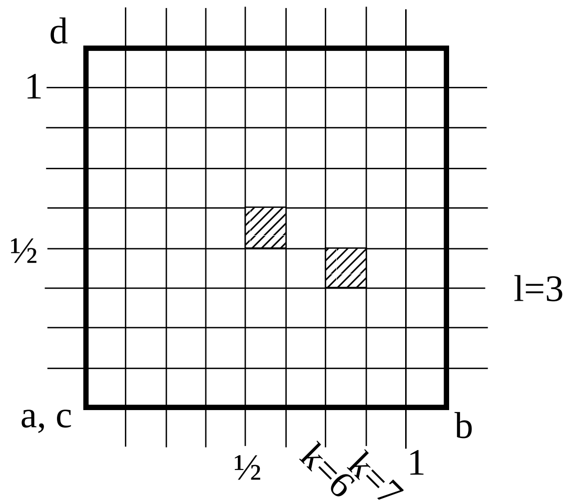
Analyysi II

Jari Taskinen

11. syyskuuta 2002

Luku 8

Sisältö



Kuva 1: Hila

8 Pintaintegraalit

Olkoon $R \subset \mathbf{R}^2$ suljettu suorakulmio

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

ja $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja $\mathcal{D}_n$ joukko tason suljettuja neliöitä:

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \left[k \cdot 2^{-n}, (k+1)2^{-n}\right] \times \left[l2^{-n}, (l+1)2^{-n}\right] \;\middle|\; k, l \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Merkitään

$$Q_{n,k,l} = \left[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}\right] \times \left[l2^{-n}, (l+1)2^{-n}\right]$$

$\cup_{k,l \in \mathbf{Z}} Q_{n,k,l} = \mathbf{R}^2$. Katso kuvat 1 ja 2.

Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jokin funktio. Haluamme määritellä sen integraalin yli joukon $\mathbf{R}$. Merkitään

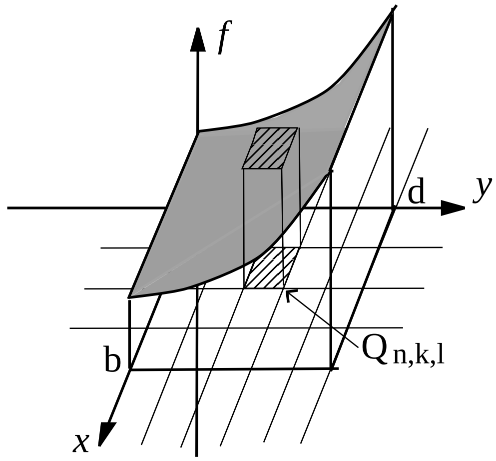
$$G_{n,k,l} = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{n,k,l}\}$$

ja

$$g_{n,k,l} = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{n,k,l}\}$$

(määrittely: jos $Q_{n,k,l} \not\subset R \Rightarrow G_{n,k,l} g_{n,k,l} = 0$). Määritellään lukua n vastaavat ylä- ja alasummat:

$$\begin{aligned} M_n &= \textstyle\sum_{k,l} G_{n,k,l} \cdot 2^{-2n} \\ m_n &= \textstyle\sum_{k,l} g_{n,k,l} \cdot 2^{-2n} \end{aligned}$$



Kuva 2: Pinta

Huom! 2^{-2n} on $Q_{n,k,l}$:n pohjan pinta-ala, joten esimerkiksi luku $G_{n,k,l} \cdot 2^{-2n}$ on kuvassa 2 olevan särmiön tilavuus. Luku $g_{n,k,l} \cdot 2^{-2n}$ on hieman pienemmän särmiön tilavuus; luku M_n on siten (hieman liian suuri) approksimaatio funktion f määräämän pinnan ja $x-y$-tason suorakulmion $\mathbf{R}$ väliin jäävän kappaleen tilavuudelle.

Määritelmä 8.1 Jos $\lim_{n\to\infty} M_n$ ja $\lim_{n\to\infty} m_n$ ovat olemassa ja

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} m_n,$$

niin sanotaan, että f on integroituva joukossa R ja kyseinen raja-arvo on funktion f *pintaintegraali* yli suorakulmion R, merkitään

$$\int\limits_R f, \quad \iint\limits_R f(x,y)\,dxdy, \quad \int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dxdy.$$

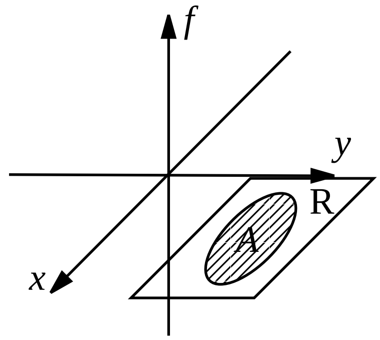
Huomatus Voidaan osoittaa, että jos $f : R \to \mathbf{R}$ on jatkuva, se on aina integroituva.

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu, $f : A \to \mathbf{R}$. Määritellään funktio f koko joukossa $\mathbf{R}$ kaavalla

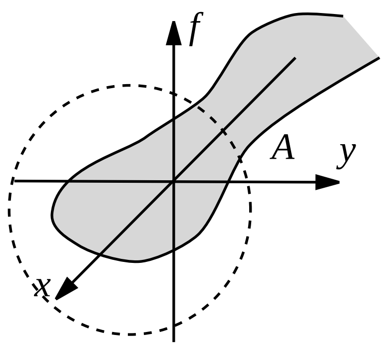
$$f(x,y) := 0, \quad \text{kun } (x,y) \notin A.$$

Merkitään f_A:lla funktion f jatketta. Valitaan suorakulmio R (reunat kokonaislukujen kohdalla kuten edellä) siten, että $A \subset R$. Määritellään

$$\int\limits_A f := \int\limits_R f_A,$$



Kuva 3:



Kuva 4:

määritelmä ei riipu suorakulmion R valinnasta. Katso kuva 3.

Jos A ei ole rajoitettu, voidaan määritellä

$$\int\limits_A f = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{A\cap B(0,m)} f,$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa. Katso kuva 4.

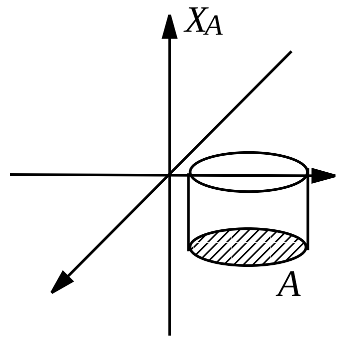
Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu. Määritellään joukon A *karakteristinen funktio* kaavalla

$$\mathcal{X}_A(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A. \end{cases}$$

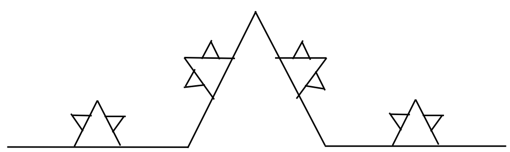
Määritelmä A on *mitallinen*, jos $\mathcal{X}_A$ on integroituva A:ssa. Katso kuva 5.

Huomatus Itse asiassa

$$\int\limits_A \mathcal{X}_A = A\text{:n "pinta-ala"}.$$



Kuva 5:



Kuva 6: Kochin lumihiutalekäyrä

$\int\limits_A \mathcal{X}_A = A$:n *pintamitta* $=: m(A)$. Jos $m(A) = 0$, niin sanotaan, että A on nollamittainen.

Lause 8.2 Jos joukon A reuna on nollamitallinen, niin A on mitallinen.

Lause 8.3 Jos kaari on säännöllinen tai muotoa

$$\{(x, y) \mid x \in [a, b]\,, y = \psi(x)\},$$

missä $\psi : [a, b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin se on nollamittainen.

Huomautus 1 Nollamittaisten joukkojen äärellinen yhdiste on nollamittainen. Kochin lumihiutalekäyrä (katso kuva 6) on esimerkki monimutkaisesta tason osajoukosta, ns. fraktaalista. Fraktaalireunaiset joukot eivät yleensä ole mitallisia edellä esitetyssä mielessä, eikä niiden yli voida integroida tällä tekniikalla.

Lause 8.4 Jos funktiot $f_1, \ldots, f_m$ ovat integroituvia A:ssa ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{R}$, niin funktio

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m$$

on integroituva A:ssa, ja

$$\int\limits_A \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m = \lambda_1 \int\limits_A f_1 + \cdots + \lambda_m \int\limits_A f_m.$$

Lause 8.5 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $m(\delta(A)) = 0$. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ sellainen funktio, että f on jatkuva lukuunottamatta mahdollisesti jotain A:n nollamittaista osajoukkoa B. Silloin f on integroituva A:ssa.

Esimerkki. Olkoon $A = B((3,4), 100)$ ja

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y), & \text{kun } y \geq 0 \\ -1, & \text{kun } y < 0. \end{cases}$$

Tämä ei ole jatkuva x-akselilla (=L), mutta $L \cap A$ on nollamittainen(jana).

Lause 8.6 Olkoon A joukko, joka on jaettu osiin A_i, $i = 1, \ldots, n$, missä $m(\delta(A_i)) = 0$. Funktio f on integroituva joukossa A jos ja vain jos f on integroituva jokaisessa joukossa A_i. Tällöin

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \cdots + \int_{A_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f.$$

Lause 8.7 Oletetaan että f on integroituva joukossa

$$R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

ja jokaisella kiinteällä $x \in [a,b]$, funktio $y \mapsto f(x,y)$ on integroituva (y:n suhteen) välillä $[c,d]$. Silloin funktio

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

on integroituva välillä $[a,b]$, ja pätee

$$\int_R f = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx.$$

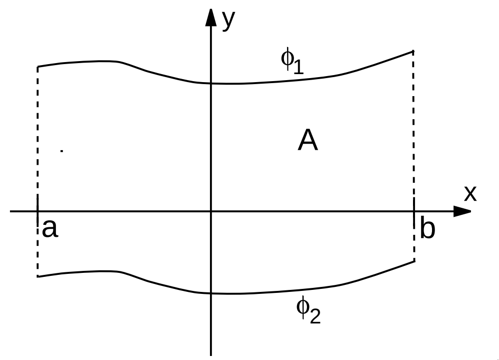
Merkitään

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dxdy \quad \left(\text{tai joskus myös} \quad \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx \right).$$

Esimerkki Laske

$$\int_R (1 - 6x^2 y),$$

kun $R = [0,2] \times [-1,1] = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.



Kuva 7:

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\int_R &= \int_0^2\int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,dxdy = \int_0^2\left(\int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^2\left(\Big[y-3x^2y^2\Big]_{y=-1}^1\right)dx = \int_0^2 (1-3x^2\cdot 1)-(-1-3x^2(-1)^2)\,dx \\
&= \int_0^2 2\,dx = 4.
\end{aligned}$$

Lause 8.8 Olkoot $\phi_1 : [a,b] \to \mathbf{R}$, $\phi_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuvia funktioita, joille $\phi_1(x) < \phi_2(x)$, $\forall\, x \in \,]a,b[$ sekä $\phi_1(a) \le \phi_2(a)$, $\phi_1(b) \le \phi_2(b)$. Oletetaan, että $f : A \to \mathbf{R}$ on integroituva, missä

$$A = \{(x,y) \mid x \in [a,b]\,, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}.$$

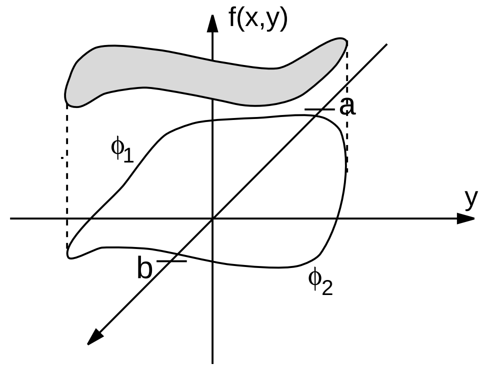
Oletetaan, että integraali

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

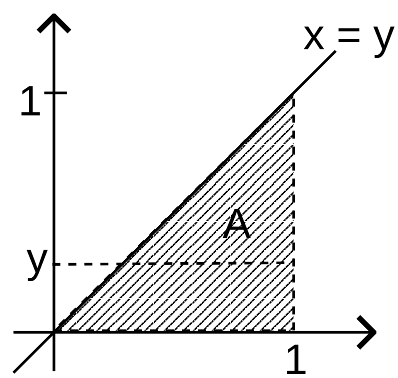
on olemassa kaikille $x \in [a,b]$. Silloin

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Katso kuvat 7 ja 8.



Kuva 8:



Kuva 9: 2.ratkaisu

Esimerkki Olkoon $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = x$ ja $f(x, y) = 3 - x - y$. Nyt $x \in [0, 1]$, joten

$$\begin{aligned}
\int\limits_A &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x 3 - x - y \, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left[3y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^x dx \\
&= \int\limits_0^1 (3x - x^2 - \frac{1}{2} x^2) \, dx = \int\limits_0^1 (3x - \frac{3}{2} x^2) \, dx \\
&= \int \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3 \right]_{x=0}^1 = 1.
\end{aligned}$$

Katso kuva 9.

Erityisesti siinä tapauksessa, että f on jatkuva, edellä mainitut integraalit ovat olemassa ja kaava pätee.

Vastaavasti: Jos integroimisalue A on muotoa

$$A = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

ja f on jatkuva A:ssa, niin

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

(Tässä $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ kaikilla $y \in [c, d]$ jne.)

Edellinen esimerkki voidaan siis laskea myös seuraavasti:

$f(x, y) = 3 - x - y$, $y \in [0, 1]$ ja $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$. Nyt $y \leq x \leq 1$ eli $\psi_1(y) = y$ ja $\psi_2(y) = 1$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\int_A f(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{1}{2}x^2 - xy \right]_{x=y}^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - \left(3y - \frac{1}{2}y^2 - y^2 \right) \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}y^2 - 4y + \frac{5}{2} \right) dy = \ldots = 1.
\end{aligned}$$

Esimerkki Integroimisjärjestyksen vaihtaminen (katso kuva 10). Tarkastellaan integraalia

$$I = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy \right) dx, \tag{1}$$

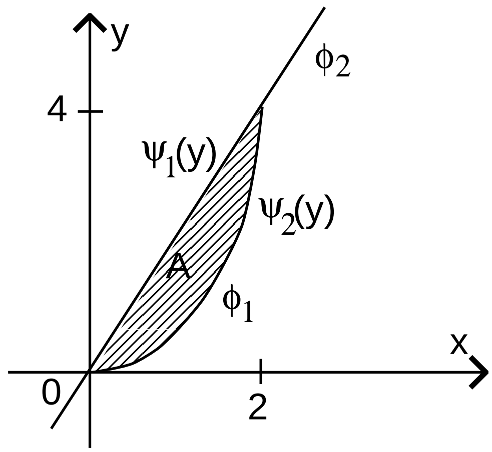
Tässä $x \in [0, 2]$, $x^2 := \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) := 2x$; huomaa, että kun $x \leq 2$, niin $x^2 = x \cdot x \leq 2x$. Tehtävänä on lausua integraali 1 muodossa

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} (4x + 2) dx \right) dy,$$

missä $y \in [0, 4]$, siis $c = 0,\ d = 4$. Mutta mitä ovat funktiot ψ_1, ψ_2?

Reunakäyrällä ϕ_1 pätee eli $y = \phi_1(x) = x^2$ jos $\sqrt{y} = x$; siten $\psi_2(y) = \sqrt{y}$ (katso kuva 10). Reunakäyrällä ϕ_2 on $y = \phi_2(x) = 2x$ eli $x = \frac{y}{2}$; siten $\psi_1(y) = \frac{y}{2}$. Siis,

$$I = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\, dx \right) dy.$$



Kuva 10: Integrointijärjestys

8.1 Muuttujien vaihto pintaintegraaleissa

Lause 8.9 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu, ja $\delta(A)$ nollamittainen ja $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva. Oletetaan, että on olemassa jatkuvasti derivoituva bijektio $g : R \to A$, missä $R \subset \mathbf{R}^2$ on suorakulmio. Tällöin

$$\int_A f = \int_R (f \circ g) \cdot |\,\mathcal{J}_g\,|,$$

missä $\mathcal{J}_g$ on funktion g funktionaalideterminantti eli *jakobiaani*,

$$\mathcal{J}_g = \begin{vmatrix} D_1 g_1 & D_2 g_1 \\ D_2 g_2 & D_2 g_2 \end{vmatrix} = (D_1 g_1)(D_2 g_2) - (D_2 g_1)(D_1 g_2),$$

missä $g = (g_1, g_2)$. Katso kuva 11.

Esimerkki Olkoon

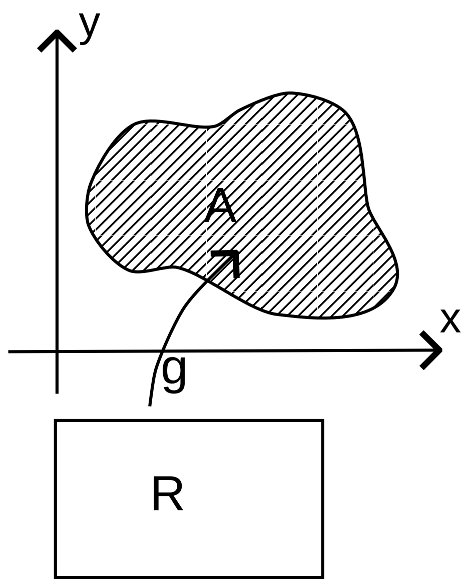
$$A := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Huomaa, että yllä $x \in [-a, a]$ ja

$$\phi_1(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} = \phi_2(x).$$

Tämä saattaa johtaa vaikeaan x-integraaliin. Tarkastellaan sen vuoksi funktiota $g : R \to A$,

$$g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$



Kuva 11: Pintaintegraali

missä $r \in [0, a]$ ja $\varphi \in [0, 2\pi]$ eli $(r, \varphi) \in \mathbf{R} := [0, a] \times [0, 2\pi]$. Tämä g on surjektio.

Huomautus Jos 1. $g : R \to A$ on injektio ja $m(A \setminus g(R)) = 0$ tai 2. $g : R \to A$ on surjektio, ja ne pisteet, joilla on enemmän kuin yksi alkukuva muodostavat nollajoukon, niin Lause 7.9 (sivu **??**) pätee edelleen.

Nyt

$$\mathcal{J}_g = D_1 g_1 D_2 g_2 - D_2 g_1 D_1 g_2 = \cos\varphi r \cos\varphi - r(-\sin\varphi)\sin\varphi = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Siis,

$$\int_A f = \int_0^a \int_0^\pi f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \, dr d\varphi.$$

Huomautus Lause 8.9 (sivu 10) pätee yleisimmillekin joukoille R kuin suorakulmioille.

8.2 Käyrä- ja pintaintegraalien yhteys

Lause 8.10 (Eräs Greenin kaavoista) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ on rajoitettu ja $\delta(A)$ Jordanin-käyrä joka koostuu äärellisestä määrästä säännöllisiä kaaria. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^2$ on jatkuvasti derivoituva. Silloin

$$\int_A (D_1 f_2 - D_2 f_1) = \int_{\delta A} f_1 dx + f_2\, dy.$$

Oletetaan myös, että $\delta(A)$:lla on jatkuvasti derivoituva parametriesitys $\varphi : \Delta \to \delta A$ siten, että $\varphi'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in \Delta$. Tällöin

$$\int_A (D_1 f_1 + D_2 f_2) = \int_{\delta A} (f \cdot \overline{n})\, ds, \tag{2}$$

missä $\overline{n}$ on reunakäyrän ulkonormaali: $|\,\overline{n}\,| = 1$, $|\,\overline{n}\,| \perp \delta(A)$:n tangentti.

8.3 Integrointi yli pinnan

Olemme käsitelleet edellä, kuinka integroidaan yli tasoalueiden. Tällaista integraalia sanotaan pintaintegraaliksi, ja se palautuu kaksinkertaiseen yhden muuttujan funktion integrointiin.

Seuraavaksi otetaan hiukan yleisempi tapaus: integroidaan yli pinnan, joka ei enää olekaan xy–tason alue, vaan pinta

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = h(x, y), (x, y) \in A\},$$

missä A on joku sopiva xy–tason osajoukko. Joukko E on siis $\mathbf{R}^3$:n osajoukko, pinta, joka on kahden muuttujan funktion h kuvaaja (esimerkiksi A:n yläpuolella). (Piirrä kuva, kun esimerkiksi A on tason yksikköneliö, ja h on funktio $h(x, y) = 1 + x^2$).

Oletamme, että kolmen muuttujan funktio f on määritelty joukossa E. Silloin sen integraalia yli pinnan E merkitään

$$\int_E f \tag{3}$$

ja se määritellään kaavalla

$$\int_E f := \int_A f(x, y, h(x, y))\sqrt{1 + D_1 h(x, y)^2 + D_2 h(x, y)^2}\, dxdy. \tag{4}$$

Huomautus Siinä tapauksessa, että f on vakiofunktio 1, tämä integraali antaa pinnan E *pinta-alan*.

Esimerkki Tarkastellaan funktion $h(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ määräämää pintaa E joukossa $\mathbf{R}^3$, kun $(x, y) \in A$, ja A on xy–tason yksikkökiekko (siis joukko $\{x^2 + y^2 < 1\}$). Piirrä kuva: Pinta E on avaruuden yksikköpallon kuoren ylempi puolikas.

Laskemme E:n pinta-alan, eli integroimme vakiofunktiota (1) yli pinnan E.

Saamme ensinnäkin (laske!)

$$D_1 h(x, y)^2 = \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} \tag{5}$$

ja

$$D_2 h(x, y)^2 = \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}. \tag{6}$$

Edelleen kaavassa (4)

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + D_1 h(x, y,)^2 + D_2 h(x, y)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

Siirtymällä napakoordinaatteihin saadaan (4) muotoon

$$\begin{aligned} \int\limits_A \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dxdy &= \int\limits_A \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}\, dxdy \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} r\, dr d\theta \\ &= 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} r\, dr = 2\pi. \end{aligned}$$

Stokesin kaavan käsittely joudutaan jättämään ajan puutteen vuoksi pois. Katso tarvittaessa kirjallisuudesta.