Analyyysi II

Jari Taskinen

12. syyskuuta 2002

Luku 9

Sisältö

9 Avaruusintegraalit

Siirrymme tarkastelemaan kolmen muuttujan funktioiden integrointia yli avaruuden $\mathbf{R}^3$ osajoukon A. Ajatus on siis se, että yleistetään aiempi tasoalueiden yli integrointi (ei yllä oleva "integrointi yli pinnan", vaan sitä edeltävä tarkastelu) tapaukseen jossa on yksi muuttuja enemmän.

Integraalin käsite ja siihen liittyvät mittateoreettiset käsitteet määritellään analogisesti kahden muuttujan funktion tapauksen kanssa. Jätämme tässä yksityiskohdat väliin.

Avaruusintegraalia merkitään esim.

$$\int_A f \quad \text{tai} \quad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Kuten arvata saattaa pintaintegraalien tapauksesta, avaruusintegraalin laskeminen palautuu kolminkertaiseen integrointiin. Olkoon ensiksi A koordinaattiakselien suuntainen suuntaissärmiö

$$A := \{(x,y,z) \mid a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2, c_1 \le z \le c_2\}$$

eli $A = [a_1,a_2]\times[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]$, missä a_1 jne. ovat jotain reaalilukuja. Tällöin

$$\int_A f = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx. \tag{1}$$

Olettaen että f on riittävän siisti, esimerkiksi jatkuva, joukossa A, integroinnit kaavassa (1) voi suorittaa missä järjestyksessä tahansa:

$$\int_A f = \int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{c_1}^{c_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dx\right)dz\right)dy = \int_{c_1}^{c_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz \ldots$$

Integraalit yli monimutkaisempien joukkojen lasketaan kuten kahden muuttujan tapuksessakin. Oletetaan, että on annettu kahden muuttujan funktiot φ_1 ja φ_2, missä $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$, kun $a_1 \le x \le a_2$ ja $b_1 \le y \le b_2$. Olkoon nyt

$$A := \{(x,y,z) \mid a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2, \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}.$$

(Hahmottele kuva joukosta A, kun φ_1 ja φ_2 ovat jotain sopivia funktioita.) Tällöin

$$\int_A f = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx.$$

Tässä x– ja y–integrointien järjestyksen voi vaihtaa.

Vielä yleisemmin, jos

$$A := \{(x,y,z) \mid a_1 \le x \le a_2, \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x), \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

joillekin sopiville funktioille ψ_1 jne., niin

$$\int_A f = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

9.1 Muuttujan vaihto avaruusintegraalissa

Olkoon $R \subset \mathbf{R}^3$ koordinaattiakselien suuntainen suuntaissärmiö, $A \subset R^3$ kuten yllä sekä $g : R \to A$ jatkuvasti derivoituva bijektio. Olkoon f joukossa A määritelty funktio, jota halutaan integroida. Pintaintegraalien tapaan voidaan suorittaa muuttujanvaihto kaavalla

$$\int_A f = \int_R (f \circ g)\,|\,\mathcal{J}_g\,|\,,$$

missä $\mathcal{J}_g$ on kuvauksen g Jacobin determinantti (3×3–determinantti, jonka j:nnen rivin i:s alkio on $D_i g_j$).

Tarkastellaan tapausta, että g välittää siirtymisen pallokoordinaatteihin, eli $g : R \to A$,

$$g(r,\varphi,\psi) := (r\cos\varphi\cos\psi, r\cos\varphi\sin\psi, r\sin\varphi)$$

$$R := \{(r,\varphi,\psi) \mid 0 \le r \le a, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2, 0 \le \psi \le 2\pi\}$$

ja A on avaruuden 0–keskinen, a–säteinen pallo

$$A = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\},$$

Tällöin $\mathcal{J}_g$ on

$$\mathcal{J}_g(r,\varphi,\psi) = r^2\cos\varphi.$$

9.2 Pinta–ja avaruusintegraalien välinen yhteys

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko, jonka reuna muodostaa pinnan S. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^3$ määritelty jatkuvasti derivoituva vektorikenttä sekä

$\bar{n}$ pinnan S ulkonormaali(vektori). Divergenssikaava yhdistää avaruus– ja pintaintegraalit seuraavasti:

$$\int_A \nabla \cdot f = \int_S f \cdot \bar{n}.$$

Mikäli vektorikentällä f on potentiaali u, eli $f = \nabla u$, saadaan erikoistapauksena Gaussin kaava

$$\int_A \Delta u = \int_S \partial_{\bar{n}} u.$$