

Analyysi II

Jari Taskinen

26. syyskuuta 2002

Sisältö

1	Vektoriavaruudet \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4	3
1.1	Geometrinen havainnollistus	5
1.2	Tason topologiaa	6
2	Useamman muuttujan funktiot	12
3	Differentiaalilaskenta	19
3.1	Osittaisderivaatta	19
3.2	Korkeamman kertaluvun derivaatat	21
3.3	Differentioituvuus	24
3.4	Gradientti ja suunnatut derivaatat	28
3.5	Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen	30
4	Käyrät, tasa-arvopinnat ja tangenttitaso	34
4.1	Pinnat	38
4.2	Tangenttitasot	38
5	Väliarvolause	41
5.1	Implisiittifunktiolause	43
6	Ääriarvojen teoriaa	46

6.1	Taylorin kaava	48
6.2	Ääriarvoista	50
7	Käyräintegraalit	55
7.1	Vektorikentän potentiaali	59
7.2	Integrointi kaaren pituuden suhteen	67
8	Pintaintegraalit	69
8.1	Muuttujien vaihto pintaintegraaleissa	76
8.2	Käyrä- ja pintaintegraalien yhteys	77
8.3	Integrointi yli pinnan	77
9	Avaruusintegraalit	79
9.1	Muuttujan vaihto avaruusintegraalissa	80
9.2	Pinta- ja avaruusintegraalien välinen yhteys	81

1 Vektoriavaruudet \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , \mathbf{R}^4

Merkitään

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^2 &:= \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\} \\ \mathbf{R}^3 &:= \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\} \\ \mathbf{R}^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbf{R}, \forall j = 1, \dots, n\} \text{ (tässä } n \in \mathbf{N})\end{aligned}$$

Näiden joukkojen alkioita sanotaan *pisteiksi* tai *vektoreiksi* ja niitä merkitään esimerkiksi

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \\ \bar{y} &= (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \\ \bar{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4\end{aligned}$$

Lukua x_1 sanotaan pisteen \bar{x} :n 1. komponentiksi/koordinaatiksi, lukua x_2 pisteen \bar{x} :n 2. komponentiksi/koordinaatiksi, jne. Nollavektori on $\bar{0} = (0, 0) \in \mathbf{R}^2$, $\bar{0} = (0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3 \dots$ sitä sanotaan myös origoksi.

Tarkastellaan avaruutta \mathbf{R}^2 . Vektorien $\bar{x} = (x_1, x_2)$ ja $\bar{y} = (y_1, y_2)$ yhteenlasku määritellään kaavalla

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Esimerkki 1.0.1

$$(1, 10) + (3, \pi) + (-4, 0) = (1 + 3 + (-4), 10 + \pi + 0) = (0, 10 + \pi).$$

Vektorin $\bar{x} = (x_1, x_2)$ kertominen reaaliluvulla a määritellään

$$a\bar{x} = (ax_1, ax_2).$$

Esimerkki 1.0.2

$$5(e, e^2) = (5e, 5e^2).$$

Vektorien \bar{x} ja \bar{y} erotus määritellään

$$\bar{x} - \bar{y} = \bar{x} + (-\bar{y}),$$

missä $-\bar{y} = -1 \cdot (y_1, y_2) = (-y_1, -y_2)$.

Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1)$ (kantavektorit). Jos vektori $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, niin se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$$

tai

$$\bar{e}_1 = \bar{i} \quad \text{ja} \quad \bar{e}_2 = \bar{j}.$$

Siis myös

$$\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j}.$$

Jos $n \in \mathbf{N}$, niin määritelmät ovat analogisia. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \\ \bar{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n.\end{aligned}$$

Määritellään

$$\begin{aligned}\bar{x} + \bar{y} &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n, \\ a\bar{x} &:= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \in \mathbf{R}^n, \\ -\bar{x} &:= (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbf{R}^n\end{aligned}$$

ja kantavektorit

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \bar{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \bar{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Jos $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, niin

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j\bar{e}_j.$$

Olkoon $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. Niiden sisätulo (skalaari-, pistetulo) määritellään

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 1.0.3 Tapauksessa $n = 4$, lasketaan sisätulo

$$(1, 0, -2, \frac{1}{2}) \cdot (1, 0, 1, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = -1.$$

Lause 1.0.4 Jos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$ ja $a, b \in \mathbf{R}$, niin

a) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

b) $\bar{x} \cdot (a\bar{y} + b\bar{z}) = a\bar{x} \cdot \bar{y} + b\bar{x} \cdot \bar{z}$

c) $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$ (ja $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ jos ja vain jos $\bar{x} = \bar{0}$).

Esimerkki 1.0.5 Jos $n = 3$, $\bar{x} = (1, 1, 0)$, $\bar{y} = (0, 3, -1)$, $\bar{z} = (0, 1, 2)$, $a = 1$ ja $b = 2$, niin

$$\bar{x} \cdot (a\bar{y} + b\bar{z}) = (1, 1, 0) \cdot [(0, 3, -1) + (0, 2, 4)] = (1, 1, 0) \cdot (0, 5, 3) = 5.$$

Toisaalta

$$a\bar{x} \cdot \bar{y} + b\bar{x} \cdot \bar{z} = (1, 1, 0) \cdot (0, 3, -1) + 2(1, 1, 0) \cdot (0, 1, 2) = 3 + 2 = 5.$$

Vektorin $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ *pituus eli normi* määritellään

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Lause 1.0.6 a) $|\bar{x}| \geq 0$

b) $|a\bar{x}| = |a| |\bar{x}|$, $\forall a \in \mathbf{R}$

c) $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| |\bar{y}|$ (Schwarzin epäyhtälö)

d) $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$ (Δ -ey)

e) $|\bar{x} - \bar{y}| \geq ||\bar{x}| - |\bar{y}||$

Merkitään vielä

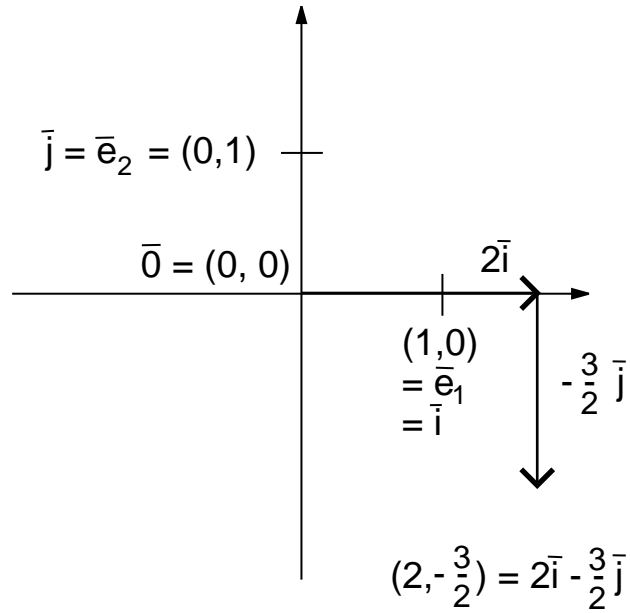
$$d(\bar{x}, \bar{y}) := |\bar{x} - \bar{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

(pisteiden \bar{x} ja \bar{y} etäisyys).

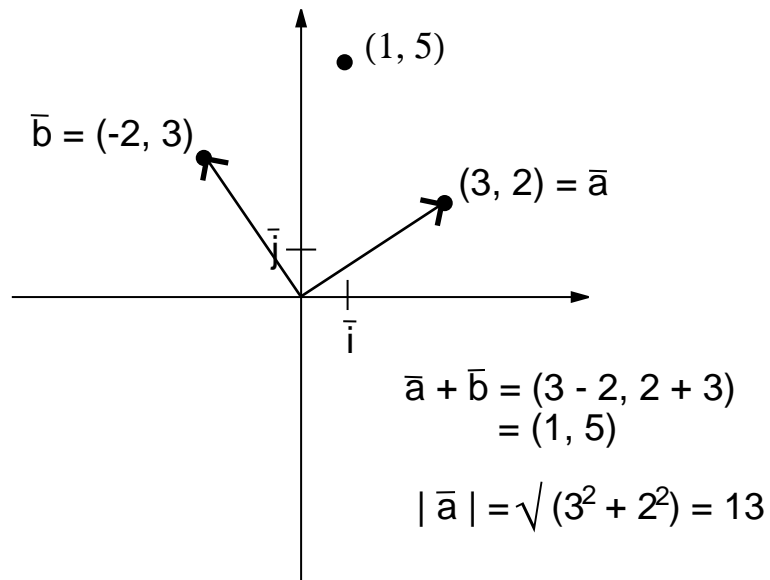
Jos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$ ja $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$, niin sanotaan, että \bar{x} ja \bar{y} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, merkitään $\bar{x} \perp \bar{y}$.

1.1 Geometrinen havainnollistus

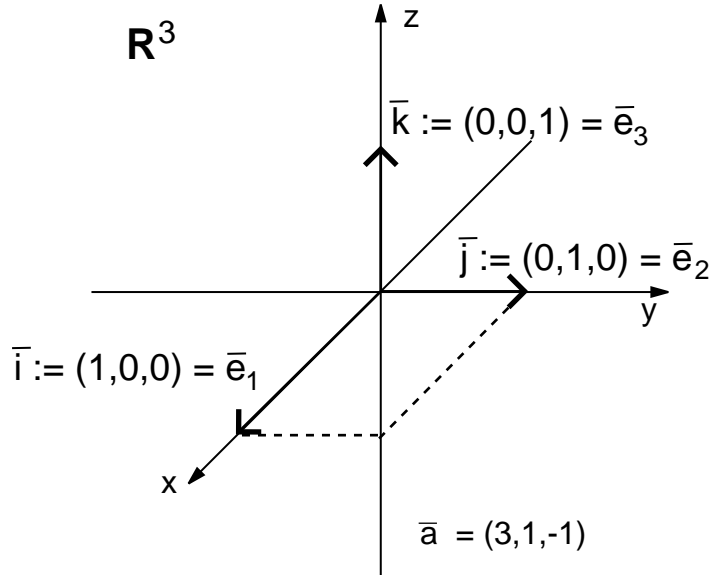
Taso \mathbf{R}^2 : Katso kuvat 1 ja 2. Avaruus \mathbf{R}^3 : Katso kuva 3.



Kuva 1: Taso \mathbf{R}^2



Kuva 2: Taso \mathbf{R}^2



Kuva 3: Avaruus \mathbf{R}^3

1.2 Tason topologiaa

Määritelmä 1.2.1 Olkoon $(\bar{x}_k)_{k=1}^\infty$ jono vektoreita \mathbf{R}^2 :ssa. Jono suppenee kohti pistettä $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$, jos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_k - \bar{x}| = 0 \quad (1)$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}.$$

Ehto (1) tarkoittaa: Kaikilla $r > 0$ voidaan löytää luku $N \in \mathbf{N}$ seuraavasti:

$$|\bar{x}_k - \bar{x}| < r, \text{ jos } k > N.$$

Esimerkki 1.2.2 Olkoon

$$\bar{x}_k = \left(2 + \frac{1}{k}, \frac{k-3}{k} \right), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Suppeneeko jono

$$(\bar{x}_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbf{R}^2?$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \left(2 + \frac{1}{1}, \frac{1-3}{1}\right) = (3, -2) \quad (\neq x_1) \\ \bar{x}_2 &= \left(2 + \frac{1}{2}, \frac{2-3}{2}\right) = \left(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \bar{x}_3 &= \left(2\frac{1}{3}, 0\right) \\ \bar{x}_4 &= \left(2\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ \bar{x}_5 &= \left(2\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Väite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = (2, 1) =: \bar{x}$$

Todistus.

$$\begin{aligned}|\bar{x}_k - \bar{x}| &= \left| \left(2 + \frac{1}{k}, \frac{k-3}{k}\right) - (2, 1) \right| = \left| \left(\frac{1}{k}, \frac{k-3-k}{k}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{k}, \frac{-3}{k} \right| = \left| \frac{1}{k}(1, -3) \right| = \frac{1}{k} | (1, -3) | = \frac{\sqrt{10}}{k}.\end{aligned}$$

Tämä lähestyy nollaa, kun k lähestyy ääretöntä. \square

Lause 1.2.3 Olkoon $(\bar{x}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^2$ jono vektoreita, $x_k = (x_{1k}, x_{2k})$ ja $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Tällöin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x} \iff \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1k} = x_1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = x_2. \end{cases}$$

Esimerkki 1.2.4 Olkoon

$$\bar{x}_k = \left(\sin\left(\frac{1}{k}\right), \cos\left(\frac{1}{k}\right) \right), \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Tässä $x_{1k} = \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ ja $x_{2k} = \cos\left(\frac{1}{k}\right)$.

Pätee:

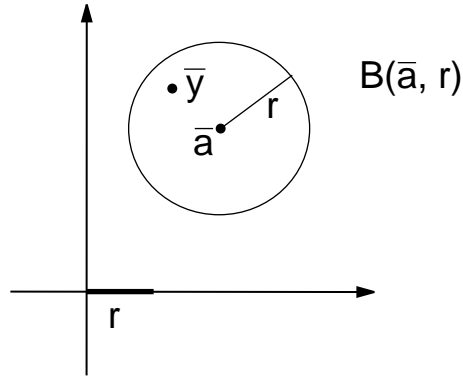
$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} x_{1k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{k}\right) = 1,\end{aligned}$$

joten lauseen 1.2.3 nojalla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = (0, 1) \in \mathbf{R}^2.$$

Lause 1.2.5 Jos $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k = \bar{y}$ ja $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ on sellainen jono, että $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, niin

a) $\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{x}_k + \bar{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k + \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k = \bar{x} + \bar{y}$,



Kuva 4: $B(\bar{a}, r)$

b) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \bar{y}_k = a \bar{y},$

c) $\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{x}_k \cdot \bar{y}_k) = \bar{x} \cdot \bar{y}.$

Olkoon $\bar{a} := (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2, r > 0.$

Määritelmä 1.2.6 \bar{a} -keskeinen r -säteinen avoin pallo (kiekko) on joukko

$$B(\bar{a}, r) = \{ \bar{y} \in \mathbf{R} \mid |\bar{y} - \bar{a}| < r \}.$$

Huomaa, että

$$|\bar{y} - \bar{a}| = \sqrt{(y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2}$$

on pisteiden \bar{y} ja \bar{a} etäisyys! Katso kuva 4. Joukkoa $B(\bar{a}, r)$ sanotaan myös \bar{a} :n (r -säteiseksi) palloympäristöksi.

Vastaavasti määritellään *suljettu kiekko*

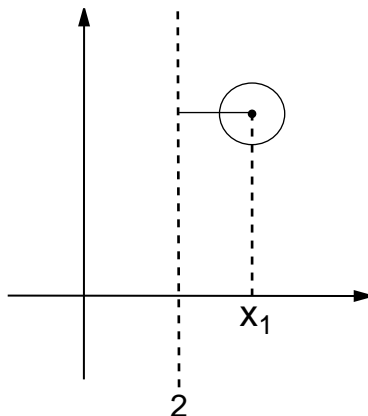
$$B(\bar{a}, r) := \{ \bar{y} \mid |\bar{y} - \bar{a}| \leq r \}$$

(sisältää kiekon reunan) ja *punkteerattu kiekko*

$$B(\bar{a}, r) := \{ \bar{y} \mid 0 < |\bar{y} - \bar{a}| < r \}.$$

Vielä toistamme, että

$$\bar{y} \in B(\bar{a}, r) \iff (y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2 < r^2.$$



Kuva 5: Avoin joukko

Määritelmä 1.2.7 Joukko $A \subset \mathbf{R}^2$ on avoin, jos jokaista $\bar{x} \in A$ kohti on olemassa sellainen kiekko $B(\bar{x}, r)$, että $B(\bar{x}, r) \subset A$.

Esimerkki 1.2.8 Osoitetaan että joukko

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 2\}$$

on avoin. Katso kuva 5.

Ratkaisu. Olkoon $\bar{x} \in A$. Silloin $x_1 > 2$. Valitaan $r := \frac{x_1 - 2}{20}$. On osoitettava, että jos $\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$, niin $\bar{y} \in A$. Pätee

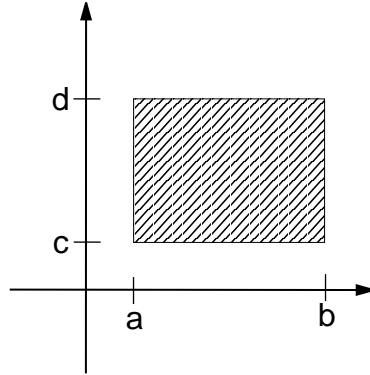
$$|y_1 - x_1| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2} \leq \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq r = \frac{x_1 - 2}{20}.$$

Tarkastellaan kahta tapausta 1. Jos $y_1 \geq x_1$, niin $y_1 > 2$ (sillä $x_1 > 2$), eli $\bar{y} \in A$

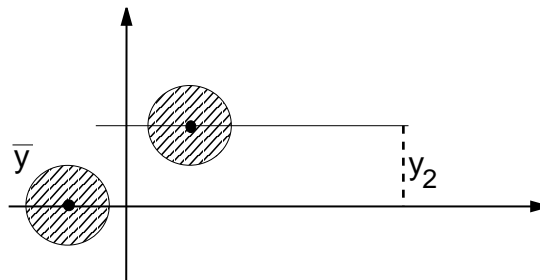
2. Jos $y_1 < x_1$, niin

$$\begin{aligned} & |y_1 - x_1| \leq \frac{x_1 - 2}{20} \\ \Leftrightarrow & x_1 - \frac{x_1 - 2}{20} \leq y_1 \\ \Leftrightarrow & 2 + (x_1 - 2) - \frac{x_1 - 2}{20} \leq y_1 \\ \Leftrightarrow & 2 + [1 - \frac{1}{20}] \cdot (x_1 - 2) \leq y_1 \\ \Rightarrow & 2 < y_1, \end{aligned}$$

eli taas $\bar{y} \in A$.



Kuva 6: Avoin suorakulmio



Kuva 7: Suljettu joukko

Lause 1.2.9 Avoin pallo on aina avoin joukko. Avoin suorakulmio

$$\{\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \mid a < x_1 < b, c < x_2 < d\}$$

on avoin joukko.

Tässä $a, b, c, d \in \mathbf{R}, a < b, c < d$. Katso kuva 6.

Määritelmä 1.2.10 Joukko $A \subset \mathbf{R}^2$ on *suljettu*, jos (komplementti) $\mathbf{R}^2 \setminus A$ on avoin. Katso kuva 7.

Jana

$$\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 10\} =: A$$

on suljettu. Merkitään $B := \mathbf{R}^2 \setminus A$. Joukko B sisältää kahdenlaisia pisteitä $\bar{y} := (y_1, y_2)$:

- 1) $y_2 \neq 0$
- 2) $y_2 = 0$, mutta $y_1 \notin [0, 10]$.

Todistetaan, että joukko B on avoin. Olkoon $\bar{y} \in B$.

Tapaus 1° Valitaan esimerkiksi $r = \frac{|y_2|}{2}$. Tällöin $B(\bar{y}, r) \subset B$.

Tapaus 2° Pätee $y_1 < 0 \vee y_1 > 10$. Jos $y_1 < 0$, valitaan $r = \frac{|y_1|}{2}$ mistä seuraa $B(\bar{y}, r) \subset B$. Jos $y_1 > 10$, valitaan $r = \frac{y_1 - 10}{2}$ mistä seuraa $B(\bar{y}, r) \subset B$.

Esimerkki 1.2.11 Joukko

$$A := \{(x, 0) \mid 0 < x < 10\}$$

ei ole avoin eikä suljettu.

Selitys. Joukko A ei ole avoin, koska jos valitaan $\bar{x} = (5, 0)$ ja $r > 0$ mielivaltainen, niin $B(x, r) \not\subset A$. Joukko A ei ole suljettu koska jos merkitään $B = \mathbf{R}^2 \setminus A$, piste $(0, 0) \in B$. Nyt B ei ole avoin. Olkoon $r > 0$ mielivaltainen. Joukko $B(0, r)$ sisältää A :n pisteitä $B(0, r) \not\subset B$ joten B ei ole avoin. Näin ollen A ei ole suljettu.

Heuristisesti: Katso kuva 8.

Esimerkki 1.2.12 Olkoon

$$A := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 < x_2 < 1 \right\}.$$

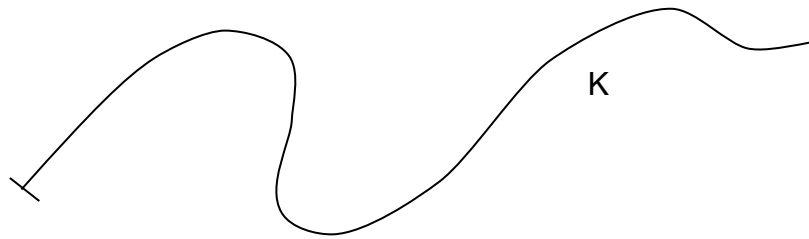
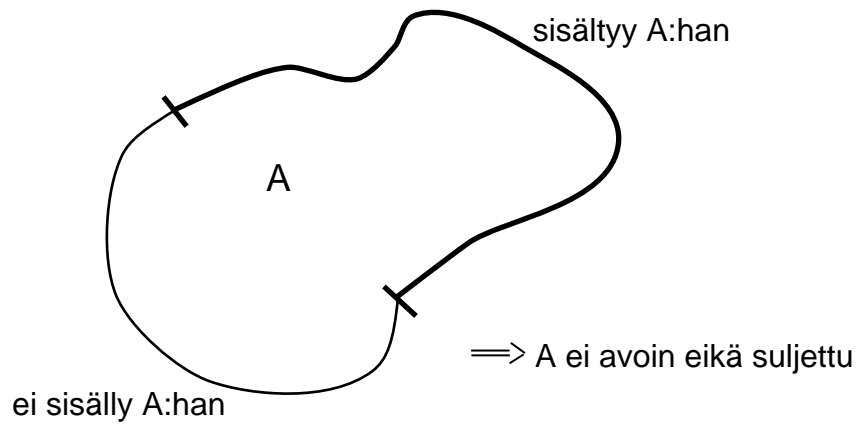
Joukko A ei ole avoin eikä suljettu. Katso kuva 9.

Määritelmä 1.2.13 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$. Piste \bar{x} on joukon A *kasaantumispiste*, jos jokainen \bar{x} :n ympäristö sisältää vähintään yhden A :n pisteen \bar{y} , $\bar{y} \neq \bar{x}$.

Esimerkki 1.2.14 Olkoon

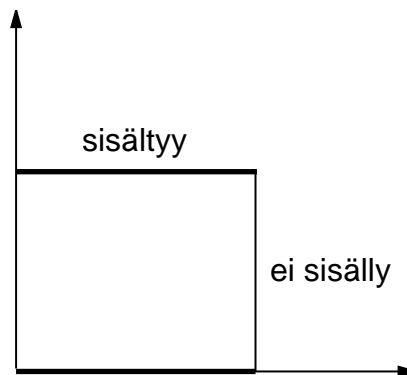
$$A := \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \mid k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Piste $\bar{0}$ on A :n kasaantumispiste. Katso kuva 10.

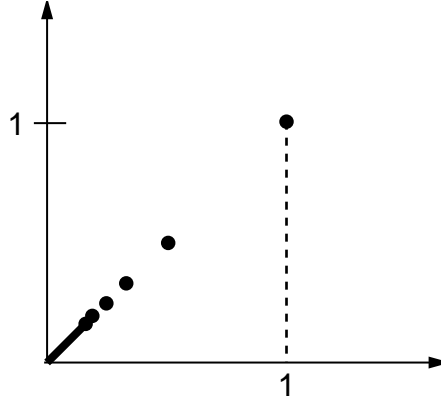


K on suljettu, jos päätepisteet sisältyvät K :hon

Kuva 8: Joukot A ja K



Kuva 9: Joukko A



Kuva 10: Kasaantumispiste

Lause 1.2.15 Jos \bar{x} on A :n kasaantumispiste, niin jokainen $B(\bar{x}, r)$ sisältää äärettömän monta A :n pistettä. Lisäksi on olemassa jono $(\bar{x}_k)_{k=1}^{\infty} \subset A$ siten, että $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}$.

Määritelmä 1.2.16 Joukon A sulkeuma on joukko

$$\bar{A} := \{\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \bar{x} \in A \text{ tai } \bar{x} \text{ on } A\text{:n kasaantumispiste}\}.$$

Lause 1.2.17 Jos $A \subset \mathbf{R}^2$, niin \bar{A} on suljettu joukko. Jos B on suljettu joukko, niin $\bar{B} = B$.

Seuraus 1.2.18 A on suljettu, jos ja vain jos A sisältää kaikki kasaantumispisteensä.

Esimerkki 1.2.19 Joukko

$$B := \left\{ \left(1, 3 + \frac{1}{k} \right) \mid k \in \mathbf{N} \right\}$$

ei ole suljettu. Joukko

$$C := B \cup \{(1, 3)\}$$

on suljettu.

Määritelmä 1.2.20 Piste \bar{x} on joukon A *sisäpiste* jos on olemassa ympäristö $B(\bar{x}, r)$, $r > 0$ siten, että $B(\bar{x}, r) \subset A$.

Piste \bar{x} on joukon A *ulkopiste*, jos $\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus A$ ja on olemassa $s > 0$ siten, että $B(\bar{x}, s) \subset \mathbf{R}^2 \setminus A$.

Piste \bar{x} on joukon A *reunapiste*, jos sen jokainen ympäristö $B(\bar{x}, r)$, $r > 0$ sisältää sekä A :n että $\mathbf{R}^2 \setminus A$:n pisteitä.

Esimerkki 1.2.21 Olkoon joukko

$$C := \{(x, y) \mid 1 < x \leq 3, 2 < y \leq 4\}$$

Piste $(1 + \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{1000}) \in C$ on sisäpiste, $(2, 4) \in C$ ei ole sisäpiste. Piste $(3\frac{1}{2}, 3)$ on joukon C ulkopiste, $(2, 2) \in \mathbf{R}^2 \setminus C$ ei ole ulkopiste. Pisteet $(2, 2)$ ja $(2, 4)$ ovat joukon C reunapisteitä.

Todistus. Tapaus $(2, 2)$: Olkoon $r > 0$ mielivaltainen.

1° Joukko $B((2, 2), r)$ sisältää C :n pisteitä: määritellään $r' = \min(1, r)$ ja $\bar{b} = (2, 2 + \frac{r'}{2})$. Tällöin $\bar{b} \in B((2, 2), r)$;

$$\left| (2, 2) - \bar{b} \right| = \left| (2, 2) - \left(2, 2 + \frac{r'}{2} \right) \right| = \left| \left(0, \frac{r'}{2} \right) \right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{r'}{2} \right)^2} = \frac{r'}{2} \leq \frac{r}{2}$$

Toisaalta $\bar{b} \in C$, koska $\bar{b} = (2, 2 + \frac{r'}{2})$.

2° Joukko $B((2, 2), r)$ sisältää joukon $\mathbf{R}^2 \setminus C$ pisteitä, esimerkiksi

$$\bar{c} = \left(2, 2 - \frac{r}{2} \right) \in (\mathbf{R}^2 \setminus C) \cap B((2, 2), r).$$

Todistus harjoitustehtävä. \square

Joukon A reuna on se joukko

$$\partial A := \{\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \bar{x} \text{ on } A\text{:n reunapiste}\}.$$

Jos $\bar{x} \notin A$, niin \bar{x} on joukon A reunapiste jos ja vain jos \bar{x} on joukon A kasaantumispiste.

Seuraus 1.2.22 $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Joukko A on suljettu jos ja vain jos se sisältää kaikki reunapisteensä.

2 Useamman muuttujan funktiot

Olkoon $m, n \in \mathbf{N}$, $A \subset \mathbf{R}^m$. Funktiota $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ sanotaan m :n muuttujan reaalfunktioksi.

Funktio $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ on m :n muuttujan vektoriarvoinen tai \mathbf{R}^n -arvoinen funktio. (Jos $m = n \geq 2$, niin f on vektorikenttä.)

Esimerkki 2.0.23 Kahden muuttujan reaaliarvoisia funktioita:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x, y) \\ f(x, y) &= x^2 + 3x^2y - y^3 \\ g(x, y) &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \\ h(x, y) &= \tan x_1 \cdot \sin x_2 \\ h(\bar{x}) &= |\bar{x}| + 3|\bar{x}|^2 \\ g(x_1, x_2) &= \begin{cases} 1, & x_1 \geq x_2 \\ \sin x_1, & x_1 < x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

missä $x, y \in \mathbf{R}$ ja $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.0.24 Kahden muuttujan \mathbf{R}^2 -arvoisia funktioita:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x})) = f_1(\bar{x})\bar{i} + f_2(\bar{x})\bar{j},$$

missä $f_1 : A \rightarrow \mathbf{R}$, $f_2 : A \rightarrow \mathbf{R}$ ja $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}); x, y \in \mathbf{R} \quad x, y \neq 0 \\ g(x_1, x_2) &= (\sin x_1 + \cos x_2, \sin x_2 - \cos x_1). \end{aligned}$$

Esimerkki 2.0.25 Kahden muuttujan \mathbf{R}^3 -arvoisia funktioita:

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x})), \bar{x} \in A \subset \mathbf{R}^2, f_j : A \rightarrow \mathbf{R}, j = 1, 2, 3, \dots$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (2x + y, 3y^2, 2x^2) \\ f(\bar{x}) &= (\sin x_1, \cos(x_1 + x_2), \tan x_2). \end{aligned}$$

Yleisesti: Funktio $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^m$ on muotoa

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})),$$

missä $\bar{x} \in A \subset \mathbf{R}^m$, ja $f_j : A \rightarrow \mathbf{R}$ on funktion f j :s komponenttifunktio.

Esimerkki 2.0.26 Ratkaise yhtälö

$$f(\bar{x}) = 0, \text{ kun } f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1^2 - 3x_2^3$$

siis yhtälö

$$x_3 + x_1^2 - 3x_2^3 = 0 \iff x_3 = 3x_2^3 - x_1^2 \text{ (pinta } \mathbf{R}^3\text{:ssa)}$$

Ratkaisu on pinta!

Esimerkki 2.0.27 Ratkaise yhtälö

$$g(\bar{x}) = (1, 2, 0), \quad g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad g(x_1 + x_2^2, x_2^2, x_1)$$

Ratkaisu. Yhtälöt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 = 1 \\ x_2^3 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2^3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt[3]{2} \\ x_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisua.

Määritelmä 2.0.28 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $\bar{a} \in \mathbf{R}^2$ siten, että $B'(\bar{a}, r) \subset A$. Luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ raja-arvo pisteessä \bar{a} , jos jokaista $r > 0$ kohti voidaan löytää $s > 0$ siten, että

$$|f(\bar{x}) - b| < r,$$

jos $|\bar{x} - \bar{a}| < s$, $\bar{x} \neq \bar{a}$. Merkitään

$$b = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}).$$

Määritelmä 2.0.29 Olkoon joukko $B \subset \mathbf{R}^2$ ja piste \bar{a} joukon B kasaantumis-piste. Luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion $g : B \rightarrow \mathbf{R}$ raja-arvo pisteessä \bar{a} joukossa B , jos jokaista $r > 0$ vastaa $s > 0$ siten, että

$$|g(\bar{x}) - b| < r,$$

kun $\bar{x} \in B$ ja $|\bar{x} - \bar{a}| < s$, $\bar{x} \neq \bar{a}$. Merkitään

$$b = \lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \in B}} f(\bar{x}).$$

Esimerkki 2.0.30 Olkoon funktio

$$f(x, y) := \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

määritelty joukossa $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mikä on funktion f raja-arvo pisteessä 0? Vastaus: 0.

Todistus. Olkoon $r > 0$. Arvioidaan lauseketta

$$|f(\bar{x}) - b| = |f(\bar{x})|.$$

On näytettävä, että tämä on pienempi kuin r , kunhan \bar{x} on riittävän lähellä origoa. Arvioidaan

$$|f(\bar{x})| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2) = |\bar{x}|^2 \quad (2)$$

Valitaan $s = \min\left(\frac{r}{2}, 1\right)$. Olkoon $|\bar{x} - \bar{a}| < s$ eli $|\bar{x}| < s$. Silloin

$$|\bar{x}^2| = |\bar{x}| \cdot |\bar{x}| \leq |\bar{x}| < s \leq \frac{r}{2}$$

□

Esimerkki 2.0.31 Määritellään funktio

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Jos $x = y^2$, niin

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - y^2)^2}{y^4 + y^4} = 0.$$

Jos $y = kx$, $k \in \mathbf{R}$, niin

$$f(x, y) = \frac{k^4 x^4 - 2k^2 x^3 + x^2}{k^4 x^4 + x^2} = \frac{1 + k^4 x^2 - 2k^2 x}{1 + k^2 x^2} \longrightarrow 1,$$

kun $x \rightarrow 0$.

Lause 2.0.32 Olkoon \bar{a} joukon A kasaantumispiste, sekä joukko $B \subset A$ ja oletetaan, että \bar{a} on myös joukon B kasaantumispiste. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Jos on olemassa luku $b \in \mathbf{R}$ siten, että

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \in A}} f(\bar{x}) = b,$$

niin pätee myös

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \in B}} f(\bar{x}) = b.$$

Esimerkki 2.0.33 Raja-arvon laskeminen käyriä pitkin. Olkoon $g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ ja tarkastellaan raja-arvoa joukossa $A \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, eli lauseketta

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{0}, \\ \bar{x} \in A}} g(\bar{x}) \quad (3)$$

a) $A := \{(t, kt) \mid t \in \mathbf{R}, t > 0\}$ (k kiinteä). Silloin

$$(3) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, kt)$$

(katso esimerkki 2.0.31).

b) $A := \{t^2, t \mid t \in \mathbf{R}\}$ Silloin

$$(3) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t^2, t).$$

Esimerkki 2.0.34 Olkoon funktio

$$g(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}.$$

Nyt

$$\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{0} \\ \bar{x} \rightarrow A}} g(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 - t^2)^2}{t^4 + t^4} = 0.$$

Huomautus 2.0.35 Lauseen 2.0.32 seurauksena funktiolla

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}$$

ei ole raja-arvoa pisteessä $\bar{0}$.

Määritelmä 2.0.36 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ siten, että $B'(\bar{a}, r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Funktiolla $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ on raja-arvo $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ pisteessä \bar{a} jos jokaista $r > 0$ vastaa $s > 0$ siten, että

$$\left| f(\bar{x}) - \bar{b} \right| < r, \text{ kun } |\bar{x} - \bar{a}| < s, \quad \bar{x} \in A, \bar{x} \neq \bar{a}.$$

Vastaavasti määritellään raja-arvo joukossa A , jos piste \bar{a} on joukon A kasaantumispiste.

Lause 2.0.37 Olkoon $A, \bar{a}, \bar{b}, f := \{f_1, \dots, f_m\}$, kuten Määritelmässä 2.0.36. Piste \bar{b} on funktion f raja-arvo pisteessä \bar{a} , jos ja vain jos

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = b_k, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Todistus. Oletetaan

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}. \quad (4)$$

Olkoon $k \in \{1, \dots, m\}$. On osoitettava että

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = \bar{b}_k.$$

Olkoon $r > 0$. On löydettävä $s > 0$ siten, että $|f_k(\bar{x}) - b_k| < r$, kun $|\bar{x} - \bar{a}| < s$. Koska (4) pätee, niin on olemassa $s > 0$ siten, että $|f(\bar{x}) - \bar{b}| < r$, kun $|\bar{x} - \bar{a}| < s$. Tällöin

$$|f_k(\bar{x}) - b_k| = \sqrt{|f_k(\bar{x}) - b_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m |f_j(\bar{x}) - b_j|^2} = |f(\bar{x}) - \bar{b}| < r.$$

Oletetaan toisaalta, että

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = b_k \quad (5)$$

pätee kaikille k . Olkoon $r > 0$. Valitaan $s_k > 0$ siten, että $|f_k(\bar{x}) - b_k| < \frac{r}{m}$, kun $|\bar{x} - \bar{a}| < s_k$. Valitaan $s = \min_{1 \leq k \leq m} s_k$. Jos $|\bar{x} - \bar{a}| < s$, niin

$$|f(\bar{x}) - \bar{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^m |f_k(\bar{x}) - b_k|^2} \leq \sum_{k=1}^m |f_k(\bar{x}) - b_k| < \sum_{k=1}^m \frac{r}{m} = m \frac{r}{m} = r.$$

□

Esimerkki 2.0.38 Olkoon joukko $A = \mathbf{R} \setminus \{(0, 1, 0)\}$, $m = 2$, ja

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_1 + \sin(x_2 x_3), \frac{x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2} \right) \\ f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + \sin(x_2 x_3) \quad (A \rightarrow \mathbf{R}) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2} \quad (A \rightarrow \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Tässä f_1 ja f_2 ovat kuvauksia $A \rightarrow \mathbf{R}$. Laske $\lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} f(\bar{x})$.

Lauseen 2.0.37 mukaan on syytä tarkastella komponenttifunktioita erikseen:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} f_1(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} x_1 + \sin(x_2 x_3) = 0 + \sin 0 = 0.$$

Voidaan olettaa, että $|x_1| \leq 1$, $|x_2 - 1| \leq 1$ ja $|x_3| \leq 1$. Tästä seuraa

$$\left| x_1^4 (x_2 - 1)^4 x_3^4 \right| = |x_1|^4 |x_2 - 1|^4 |x_3|^4 \leq |x_1|^2 |x_2 - 1|^2 |x_3|^2 \leq (x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2)^3.$$

Siis,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_1^4(x_2-1)^4x_3^4}{x_1^2+(x_2-1)^2+x_3^2} \right| &\leq \left| \frac{(x_1^2+(x_2-1)^2+x_3^2)^3}{x_1^2+(x_2-1)^2+x_3^2} \right| = (x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2)^2 \\ &= |\bar{x} - (0, 1, 0)|^4 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $\bar{x} \rightarrow (0, 1, 0)$, eli $|\bar{x} - (0, 1, 0)| \rightarrow 0$. Näin ollen

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow (0,1,0)} f(\bar{x}) = 0$$

Lause 2.0.39 Oletetaan, että kuvauksille $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ pätee

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}, \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x}) = \bar{c}.$$

Tällöin

- a) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x}) + g(\bar{x})) = \lim f(\bar{x}) + \lim g(\bar{x})$
- b) Jos $\lambda \in \mathbf{R}$, niin $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (\lambda f(\bar{x})) = \lambda \lim f(\bar{x})$
- c) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})) = \bar{b} \cdot \bar{c}$ (jos $n = 1$, niin tavallinen tulo).
- d) Jos $n = 1$, $g(\bar{x}) \neq 0$ niin $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{b}{c}$.

Määritelmä 2.0.40 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^m$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$. Sanotaan, että funktio f on jatkuva pisteessä $\bar{a} \in A$, jos annetulle mielivaltaiselle $r > 0$ voidaan löytää $s > 0$ seuraavasti:

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < r, \quad \text{kun } |\bar{x} - \bar{a}| < s, \bar{x} \in A.$$

Funktio f on jatkuva joukossa A jos se on jatkuva jokaisessa joukon A pisteessä.

Esimerkki 2.0.41 Funktio $f(x, y) = x^2 + 3yx + y^{10}$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva. Yleisesti n :n muuttujan reaaliarvoinen polynomi on jatkuva.

Esimerkki 2.0.42 Funktio

$$g := \frac{3xy + y + \pi x^2}{x^2 - y^2}, \quad g : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A = \{(x, y) \mid x^2 \neq y^2\}$$

on jatkuva joukossa A .

Lause 2.0.43 Kuvaus $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ on jatkuva pisteessä \bar{a} jos ja vain jos $f_k : A \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva pisteessä \bar{a} kaikilla $k = 1, \dots, n$.

Esimerkki 2.0.44 Olkoon funktio $f(x, y, z) = (x^2z^2, y+3z)$. Tässä $f_1(x, y, z) = x^2z^2$ on jatkuva ja $f_2(x, y, z) = y + 3z$ on jatkuva, joten funktio f on jatkuva \mathbf{R} :ssä.

Analogisesti Lauseen 2.0.39 kanssa, kahden jatkuvan funktion summa, skalaaritulo, jne. . . ovat jatkuvia.

Huomautus 2.0.45 Olkoot $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, missä A, B, C ovat joukkoja:

$$g \circ f(x) := g(f(x)),$$

kun $x \in A$. Siis $g \circ f : A \rightarrow C$.

Lause 2.0.46 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$, $B \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ siten, että $f(A) \subset B$ ja $g : B \rightarrow \mathbf{R}^k$. Oletetaan edelleen että joukko B on avoin, piste $\bar{a} \in A$, funktio f on jatkuva pisteessä \bar{a} ja funktio g on jatkuva pisteessä $f(\bar{a})$. Silloin funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä \bar{a} .

Esimerkki 2.0.47 Määritellään funktio $f(x, y) = (x^2, y)$, $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Se on jatkuva ja sen iteraateille pätee

$$f^2(x, y) = f \circ f(x, y) = f(x^2, y) = (x^4, y)$$

$$f^3(x, y) = f \circ f \circ f(x, y) = f(f^2(x^2, y)) = f(x^4, y) = (x^8, y)$$

⋮

$$f^n(x, y) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ kappaletta}}(x, y)$$

Kaikki nämä ovat jatkuvia.

Esimerkki 2.0.48 Määritellään funktio $f(x, y) = (y, x^2)$, $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ joka on jatkuva.

$$f^2(x, y) = f(y, x^2) = (x^2, y^2)$$

$$f^3(x, y) = f(f^2(x, y)) = f(x^2, y^2) = (y^2, x^4)$$

$$f^4(x, y) = \dots = (x^4, y^4) \text{ jne. . .}$$

3 Differentiaalilaskenta

3.1 Osittaisderivaatta

Määritelmä 3.1.1 Olkoon $\bar{a} = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ ja f reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty ainakin \bar{a} :n jossakin ympäristössä. Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

niin tätä sanotaan funktion f osittaisderivaataksi 1. muuttujan suhteen (tai x :n suhteen) pisteessä \bar{a} . Merkitään

$$D_1 f(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}), \quad f_{x_1}(\bar{a}), \quad f'_{x_1}(\bar{a}).$$

Vastaavasti määritellään f :n osittaisderivaatta toisen muuttujan suhteen raja-arvona

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Tätä merkitään

$$D_2 f(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a}) \text{ jne.}$$

Sanotaan, että funktio f on derivoituva pisteessä \bar{a} , jos derivaatat $D_1 f(\bar{a})$ ja $D_2 f(\bar{a})$ ovat olemassa. Jos funktio f on derivoituva joukon A jokaisessa pisteessä, niin f on derivoituva joukossa A .

Esimerkki 3.1.2 Olkoon

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{kun } (x, y) = (1, 0) \\ \frac{xy^3}{(x-1)^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (1, 0) \end{cases}$$

Tällöin

$$D_1 f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

ja

$$D_2 f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, h) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2 h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Olkoon f kuten yllä. Pitäen muuttujaa y kiinteänä määritellään x :n funktio $g(x) := f(x, y)$. Silloin

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h, y) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Näemme siis, että osittaisderivaatta x :n suhteen voidaan muodostaa tuttuja derivoimissääntöjä käyttäen (pitämällä y vakiona).

Esimerkki 3.1.3 Jos

$$f(x, y) = x^3 y^2 + x^4 \sin y,$$

on osittaisderivaatta

$$D_1 f(x, y) = 3y^2 x^2 + 4x^3 \sin y.$$

Jos

$$g(x, y) = y^2 + e^{xy},$$

on osittaisderivaatta

$$D_1 g(x, y) = 0 + e^{xy} \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = e^{xy} y.$$

Vastaavasti $\frac{\partial}{\partial y}$ muodostetaan pitämällä x :ää vakiona (f ja g kuten yllä):

$$\begin{aligned} D_2 f(x, y) &= 2x^3 y + x^4 \cos y, \\ D_2 g(x, y) &= 2y + x e^{xy}. \end{aligned}$$

Useamman muuttujan funktion osittaisderivaatat

Olkoon funktio g määritelty pisteen $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ympäristössä, ja $j \in \{1, \dots, n\}$. Raja-arvot

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - g(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)}{h}$$

on osittaisderivaatta j :nen muuttujan suhteen, ja sitä merkitään $D_j g(\bar{a})$.

Esimerkki 3.1.4 Määritellään funktio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_3 + \sin(x_2 + x_4) + e^{x_1 + x_4}.$$

Sen osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f &= 2x_1 x_3 + 0 + e^{x_1 + x_4} \cdot \underbrace{D_1(x_1 + x_4)}_{=1} = 2x_1 x_3 + e^{x_1 + x_4} \\ D_2 f &= 0 + \cos(x_2 + x_4) + 0 = \cos(x_2 + x_4) \\ D_3 f &= x_1^2 \\ D_4 f &= \cos(x_2 + x_4) + e^{x_1 + x_4}. \end{aligned}$$

Huomautamme, että derivoituvan funktion ei tarvitse olla jatkuva.

Esimerkki 3.1.5 Funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \vee y = 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ei ole jatkuva pisteessä $\bar{0} = (0, 0)$, mutta

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0, \quad D_2 f(0, 0) = 0.$$

3.2 Korkeamman kertaluvun derivaatat

Jos derivaatta $D_j f$ on olemassa pisteen \bar{a} ympäristössä ja $D_j f$ on derivoituva k :nen muuttujan suhteen, saadaan 2. kertaluvun osittaisderivaatta

$$D_{jk} f(\bar{a}) = (D_k(D_j f))(\bar{a})$$

($j, k \in \{1, \dots, n\}$, kun f on n :n muuttujan funktio). Merkitään myös

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{a}).$$

Vastaavasti määritellään funktion f korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat

$$D_{jki} f := D_i(D_{jk} f)$$

ja niin edelleen. Sanotaan, että f on m kertaa jatkuvasti derivoituva, jos kaikki enintään kertalukua m olevat osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Esimerkki 3.2.1 Funktion

$$f(x, y, z) := x^3 y^2 + x^4 \sin y + \cos(xz)$$

osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f &= 3y^2 x^2 + 4x^3 \sin y - z \sin(xz) \\ D_2 f &= 2x^3 y + x^4 \cos y \\ D_3 f &= -x \sin(xz). \end{aligned}$$

Päteekö $D_{12} = D_{21}$?

$$\begin{aligned}
 D_{11}f &= 6xy^2 + 12x^2 \sin y - z^2 \cos(xz) \\
 D_{22}f &= 2x^3 - x^4 \sin y \\
 D_{33}f &= -x^2 \cos(xz) \\
 D_{12}f &= D_2(D_1f) = 6x^2y + 4x^3 \cos y \\
 D_{21}f &= D_1(D_2f) = 6x^2y + 4x^3 \cos y \\
 D_{13}f &= D_3(D_1f) = -\sin(xz) - xz \cos(xz) \\
 D_{31}f &= D_1(D_3f) = -\sin(xz) - xz \cos(xz) \\
 D_{23}f &= 0 \\
 D_{32}f &= 0.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 3.2.2 Määritellään funktio

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq \bar{0} \\ 0 & \text{kun } (x, y) = \bar{0}. \end{cases}$$

Kun $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
 D_1f = D_1\left(\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\
 &= \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \quad (6)
 \end{aligned}$$

ja

$$D_2f = \dots = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (7)$$

Tuloksesta (6) seuraa

$$D_1f(0, y) = \frac{0 \cdot y^3 + 0 \cdot y - y^5}{(0^2 + y^2)^2} = \frac{-y^5}{y^4} = -y, \quad \text{kun } y \neq 0, \quad (8)$$

ja tuloksesta (7)

$$D_2f(x, 0) = \dots = x, \quad x \neq 0. \quad (9)$$

Osittaisderivaatat origossa ovat

$$D_1f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0 \cdot (h^2 - 0^2)}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \quad (10)$$

ja

$$D_2f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \dots = 0. \quad (11)$$

Nyt tuloksien (8) ja (10) avulla saadaan

$$D_{12}f(0,0) = D_2(D_1f)(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_1f(0,h) - D_1f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

ja tuloksista (9) ja (11)

$$D_{21}f(0,0) = D_1(D_2f)(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

On kuitenkin vain erikoistapaus, että osittaisderivaatat saavat eri arvot.

Lause 3.2.3 Olkoon funktio f reaaliarvoinen kuvaus, joka on määritelty pisteen $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä. Oletetaan, että $D_{12}f$ ja $D_{21}f$ ovat olemassa pisteen (a,b) ympäristössä ja jatkuvia ainakin pisteessä (a,b) . Silloin

$$D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b).$$

Todistus sivuutetaan.

Esimerkki 3.2.4 Olkoon

$$f(x,y) = x^2y + e^{xy}.$$

Osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} D_1 &= 2xy + ye^{xy} \\ D_2 &= x^2 + xe^{xy} \\ D_{21} &= 2x + e^{xy}(1 + xy) \\ D_{12} &= 2x + e^{xy}(1 + xy) \end{aligned}$$

Olkoon $f = (f_1, \dots, f_n)$ pisteen $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$ ympäristössä määritelty vektoriarvoinen kuvaus. Määritellään funktion f osittaisderivaatta x_j :n suhteen pisteessä \bar{a} raja-arvona

$$D_j f(\bar{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{h}$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Ei ole vaikea osoittaa, että osittaisderivaatta saadaan derivoimalla komponenttifunktiot:

$$D_j f(\bar{a}) = (D_j f_1(\bar{a}), \dots, D_j f_n(\bar{a})).$$

Esimerkki 3.2.5 Olkoon $m = 2$, $n = 3$ ja

$$f(x, y) = (\sin(x + y), x^2, e^{xy}).$$

Osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= (\cos(x + y), 2x, ye^{xy}) \\ D_2 f(x, y) &= (\cos(x + y), 0, xe^{xy}). \end{aligned}$$

Lause 3.2.6 Olkoon funktio f määritelty pisteessä $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$, reaaliarvoinen. Jos osittaisderivaatat $D_{ij}f$ ja $D_{ji}f$, $i < j$, ovat olemassa pisteen \bar{a} ympäristössä ja jatkuvia pisteessä \bar{a} , niin

$$D_{ij}f(\bar{a}) = D_{ji}f(\bar{a}), \quad i, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Todistus. Olkoon $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Määritellään

$$g(x, y) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_m)$$

joka on kahden muuttujan funktio. Funktiolle g pätee: x on määritelty pisteen $\bar{a}' = (a_i, a_j) \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä, D_1g , D_2g määritelty \bar{a}' :n ympäristössä jne. . . Sovelletaan lausetta 3.2.3.

$$D_{ij}f(\bar{a}) = D_{12}g(a_i, a_j) = D_{21}g(a_j, a_i) = D_{ji}f(\bar{a}).$$

□

Esimerkki 3.2.7 Jos $h : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ ja kaikki osittaisderivaatat kertalukuun 5 asti ovat jatkuvia, niin

$$D_{1234}h = D_{4321}h = D_{1432}h = \dots$$

Mutta tietenkään ei päde esimerkiksi $D_{213}h = D_{223}h$.

3.3 Differentioituvuus

Yhden muuttujan funktio f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$ jos ja vain jos on olemassa $a \in \mathbf{R}$ siten, että

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\varepsilon(h),$$

missä ε on reaaliuuttujan funktio, määritelty 0:n ympäristössä ja $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Silloin $a = Df(x_0)$.

Tutkitaan samaa asiaa kahden muuttujan funktioille. Olkoon $\bar{a} = (a_1, a_2)$ tarkastelupiste ja oletetaan, että funktio f on määrätty pisteen \bar{a} jossakin ympäristössä U . Oletetaan, että $\bar{h} \in \mathbf{R}$ siten, että $\bar{a} + \bar{h} \in U$.

Määritelmä 3.3.1 Funktio f on *differentioituva* pisteessä \bar{a} , jos on olemassa luvut α_1 ja α_2 siten, että

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}), \quad (12)$$

missä ε on jossain origon ympäristössä V määritelty funktio $V \rightarrow \mathbf{R}$ ja $\varepsilon(\bar{h}) \rightarrow 0$ kun $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$. Jos merkitään $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, niin (12) voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \bar{\alpha} \cdot \bar{h} + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}).$$

Määritelmä 3.3.2 Olkoon $A \in \mathbf{R}^2$. Funktio $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ on differentioituva joukossa A , jos se on differentioituva jokaisessa pisteessä $\bar{a} \in A$.

Lause 3.3.3 Jos funktio f on differentioituva pisteessä \bar{a} , niin se on jatkuva pisteessä \bar{a} .

Todistus. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < s, \text{ kun } |\bar{x} - \bar{a}| < r.$$

Olkoon ε kuten kaavassa (12), samoin $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Voidaan löytää s' siten, että $|\varepsilon(\bar{h})| < 1$, kun $|\bar{h}| < s'$. Valitaan $r = \min\left(s', \frac{s}{|\bar{\alpha}|+1}\right)$. Olkoon nyt \bar{x} sellainen, että $|\bar{x} - \bar{a}| < r$. Tällöin (merkitään $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a}$)

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| &= |f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})| = |\bar{\alpha} \cdot \bar{h} + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h})| \\ &\leq |\bar{\alpha} \cdot \bar{h}| + |\bar{h}| |\varepsilon(\bar{h})| \leq |\bar{h}| (|\bar{\alpha}| + |\varepsilon(\bar{h})|) \\ &\leq |\bar{x} - \bar{a}| (|\bar{\alpha}| + 1) < r (|\bar{\alpha}| + 1) \leq \frac{s}{|\bar{\alpha}|+1} (|\bar{\alpha}| + 1) = s. \end{aligned}$$

□

Lause 3.3.4 Jos funktio f on differentioituva pisteessä \bar{a} , niin f on derivoituva ja

$$D_j f(\bar{a}) = \alpha_j, \quad j = 1, 2$$

Todistus. Tapaus $j = 1$.

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}),$$

missä $\varepsilon(\bar{h}) \rightarrow 0$ kun $\bar{h} \rightarrow 0$. Tämä pätee, kun \bar{h} on jossakin $\bar{0}$:n ympäristössä. Erityisesti voidaan tarkastella tapausta $\bar{h} = (h_1, 0)$, missä $h_1 > 0$. Muodostetaan

$$\begin{aligned} \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})}{h_1} &= \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = \frac{\alpha_1 h_1}{h_1} + \frac{|\bar{h}|}{h_1} \varepsilon(\bar{h}) \\ &= \alpha_1 + \frac{|\bar{h}|}{h_1} \varepsilon(\bar{h}) \rightarrow \alpha_1, \end{aligned}$$

kun $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$. Tämä todistaa, että $D_1 f(\bar{a}) = \alpha_1$, koska osittaisderivaatan määritelmän mukaan on toisaalta

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = D_1 f(\bar{a}).$$

Toinen muuttuja käsitellään vastaavasti. \square

Differentioituvuus ja muut edellä mainitut tulokset määritellään ja todistetaan samalla tavalla n :n muuttujan funktioille.

Esimerkki 3.3.5 Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

molemmat osittaisderivaatat $D_1 f(x, y)$, $D_2 f(x, y)$ saavat origossa arvon 0. Voidaan kuitenkin osoittaa, ettei f ole differentioituva origossa.

Lause 3.3.6 Jos funktio f on derivoituva jossakin pisteen \bar{a} ympäristössä ja osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä \bar{a} , niin f on differentioituva pisteessä \bar{a} .

Esimerkki 3.3.7 Onko funktio $f(x, y, z) := x^2 y |z| + xy$ differentioituva pisteessä $(2, 0, 0)$?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y, z) &= 2xy |z| + y \\ D_2 f(x, y, z) &= x^2 |z| + x \\ D_3 f(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2, 0, h) - f(2, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ D_1 f(2, 0, 0) &= 0 \\ D_2 f(2, 0, 0) &= 2 \end{aligned}$$

Funktio f on siis derivoituva pisteessä $(2, 0, 0)$. Funktio f on differentioituva pisteessä $(2, 0, 0)$, jos

$$f(2+h_1, h_2, h_3) - f(2, 0, 0) = D_1 f(2, 0, 0)h_1 + D_2 f(2, 0, 0)h_2 + D_3 f(2, 0, 0)h_3 + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}),$$

missä $\varepsilon \rightarrow 0$ kun $|\bar{h}| \rightarrow 0$. Ratkaistaan tästä ε ja tutkitaan sen käyttäytymistä, kun $|\bar{h}| \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\bar{h}) &= \frac{f(2+h_1, h_2, h_3) - f(2, 0, 0) - 2h_2}{|\bar{h}|} \\ &= \frac{(2+h_1)^2 h_2 |h_3| + (2+h_1)h_2 - 2h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\ &= (2+h_1)^2 |h_3| \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} + h_1 \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\ &\leq (2+h_1)^2 |h_3| + |h_1| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kun $\bar{h} \rightarrow 0$. Tässä

$$\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \leq 1,$$

joten funktio f on differentioituva.

Lauseke

$$D_1 f(\bar{a})h_1 + D_2 f(\bar{a})h_2 + \dots + D_n f(\bar{a})h_n$$

on nimeltään funktion f differentiaali pisteessä \bar{a} , merkitään $df(\bar{a})(\bar{h})$. Pätee siis

$$\Delta f = f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \approx df(\bar{a})(\bar{h}),$$

kun \bar{h} on ”pieni”.

Esimerkki 3.3.8 Funktion $f(x, y) = x^3 y^2$ osittaisderivaatat ovat

$$D_1 f = 3x^2 y^2 \quad \text{ja} \quad D_2 f = 2x^3 y.$$

Kun $\bar{a} = (a_1, a_2) = (1, 2)$ ja $\bar{h} = (h_1, h_2) = (-0.04, 0.05)$ on funktion f differentiaali

$$df(\bar{a})(\bar{h}) = D_1 f(1, 2) \cdot (-0.04) + D_2 f(1, 2) \cdot 0.05 = \dots = -0.28$$

ja

$$\Delta f = f(0.96, 2.05) - f(1, 2) = 0.96^3 \cdot 2.05 - 4 \approx -0.2819 \dots$$

Esimerkki 3.3.9 (Virhearviointi) Pyritään määrittämään maan vetovoiman kiihtyvyys (g) kokeellisesti, mittaamalla putoamisaikaa t ja putoamismatkaa s .

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow g = \frac{2s}{t^2}.$$

Mittaustulokset s ja t eroavat jonkin verran todellisista arvoista $s+h_1$, $s+h_2$. Tällöin g :n virhe

$$\Delta g = g(s+h_1, t+h_2) - g(s, t) \approx dg(s, t)(\bar{h}) = \frac{\partial g}{\partial s}h_1 + \frac{\partial g}{\partial t}h_2 = \frac{2}{t^2}h_1 - \frac{4s}{t^3}h_2.$$

Jos tiedetään mittaustarkkuudet eli $|h_1| \leq \delta$ (jokin vakio) ja $|h_2| \leq \tau$ (myös jokin vakio), niin

$$\left| dg(s, t)(\bar{h}) \right| \leq \frac{2}{t^2}\delta + \frac{4|s|}{t^3}\tau.$$

(Huomatus! Osittaisderivaatan jatkuvuudesta seuraa siis differentioituvuus, josta taas seuraa osittaisderiviutuvuuden olemassaolo.)

3.4 Gradientti ja suunnatut derivaatat

Määritelmä 3.4.1 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, differentioituva. Tällöin funktion f *gradientti* on vektoriarvoinen funktio $A \rightarrow \mathbf{R}^2$, Merkitään

$$\text{grad} f = \nabla f := (D_1 f, D_2 f) = D_1 f \hat{i} + D_2 f \hat{j}.$$

Yleensä, jos $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ niin määritellään

$$\nabla f := (D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f).$$

Pätee

$$df(\bar{a})(\bar{h}) = D_1 f(\bar{a})h_1 + D_2 f(\bar{a})h_2 = (D_1 f(\bar{a}), D_2 f(\bar{a})) \cdot (h_1, h_2) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h},$$

missä $\bar{h} = (h_1, h_2)$. Myös avaruudessa \mathbf{R}^n

$$df(\bar{a})(\bar{h}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h}.$$

Olkoon $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2$ siten, että $|\bar{a}| = 1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. Olkoon funktio f pisteen $\bar{a} = (a_1, a_2)$ ympäristössä määritelty reaaliarvoinen funktio. Joukko

$$\{\bar{a} + t\bar{a} \mid t \in \mathbf{R}\}$$

on pisteen \bar{a} kautta kulkeva \bar{a} :n suuntainen suora.

Määritelmä 3.4.2 Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{\alpha}) - f(\bar{a})}{t},$$

niin sitä kutsutaan derivaataksi suuntaan $\bar{\alpha}$ (pisteessä \bar{a}), merkitään $\partial_{\bar{\alpha}}f(\bar{a})$.

Huomautus 3.4.3 Jos $\bar{\alpha} = (0, 1) = \hat{j}$, niin $\partial_{\bar{\alpha}}f(\bar{a}) = D_2f$.

Huomautus 3.4.4 Määritelmä 3.4.2 on sama \mathbf{R}^n :ssä.

Lause 3.4.5 Jos f on differentioituva pisteessä \bar{a} , niin $\partial_{\bar{\alpha}}f(\bar{a})$ on olemassa jokaiseen suuntaan $\bar{\alpha}$ ja

$$\partial_{\bar{\alpha}}f(\bar{a}) = D_1f(\bar{a})\alpha_1 + D_2f(\bar{a})\alpha_2 + \cdots + D_nf(\bar{a})\alpha_n = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha}.$$

Lause todistetaan myöhemmin.

Esimerkki 3.4.6 Laske funktion

$$f(x, y, z) := x^4 + x^3y + 2x^2z$$

derivaatta pisteessä $(1, 2, 5)$ vektorin $(4, -2, 2)$ suuntaan.

Ratkaisu. Lasketaan vektorin $(4, -2, 2) = \bar{v}$ suuntainen yksikkövektori

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{(4, -2, 2)}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1f &= 4x^3 + 3x^2y + 4xz; & D_1f(1, 2, 5) &= 30 \\ D_2f &= x^3; & D_2f(1, 2, 5) &= 1 \\ D_3f &= 2x^2; & D_3f(1, 2, 5) &= 2, \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2, 5) &= (30, 1, 2) \\ \partial_{\bar{\alpha}}f(1, 2, 5) &= (30, 1, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \frac{61}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Lauseen 3.4.5 todistus:

Olkoon \bar{a} tarkastelupiste, jossa funktio f on differentioituva ja olkoon $\bar{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, $|\bar{\alpha}| = 1$ ja $t \in \mathbf{R}$. Koska funktio f on differentioituva, niin

$$f(\bar{a} + t\bar{\alpha}) - f(\bar{a}) = D_1 f(\bar{a})t\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})t\alpha_n + |t| |\bar{\alpha}| \varepsilon(t\bar{\alpha}).$$

Siis erotusosamäärä

$$\begin{aligned} \frac{f(\bar{a} + t\bar{\alpha}) - f(\bar{a})}{t} &= D_1 f(\bar{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})\alpha_n + \frac{|t|}{t} \varepsilon(t\bar{\alpha}) \\ &\longrightarrow D_1 f(\bar{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})\alpha_n \end{aligned}$$

kun $t \rightarrow 0$. Raja-arvo on siis olemassa, joten on olemassa suunnattu derivaatta, joka on

$$D_1 f(\bar{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\bar{a})\alpha_n = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha}. \quad \square$$

Huomautus 3.4.7 Suunnatulle derivaatalle saadaan arvio

$$\begin{aligned} |\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a})| &= |\nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha}| \\ &\leq |\nabla f(\bar{a})| |\bar{\alpha}| = |\nabla f(\bar{a})| \\ &= \sqrt{(D_1 f(\bar{a})\alpha_1)^2 + \cdots + (D_n f(\bar{a})\alpha_n)^2}. \end{aligned}$$

Eryityisesti, jos $\nabla f(\bar{a}) = 0$, niin $\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a}) = 0$ kaikkiin suuntiin α . Jos $\nabla f(\bar{a}) \neq 0$, niin voidaan kysyä, mihin suuntaan $\bar{\alpha}$ saadaan suurin derivaatta. Vastaus: Kun $\bar{\alpha} \uparrow \nabla f(\bar{a})$ eli

$$\bar{\alpha} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{|\nabla f(\bar{a})|};$$

silloin pätee

$$\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{\alpha} = \nabla f(\bar{a}) \cdot \frac{\nabla f(\bar{a})}{|\nabla f(\bar{a})|} = \frac{|\nabla f(\bar{a})|^2}{|\nabla f(\bar{a})|} = |\nabla f(\bar{a})|.$$

3.5 Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen

Määritelmä 3.5.1 Vektoriarvoista funktiota

$$g := (g_1, \dots, g_n), \quad g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n, g_j : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$$

sanotaan differentioituvaksi pisteessä \bar{a} , jos jokainen komponenttifunktio g_j on differentioituva pisteessä \bar{a} .

Lause 3.5.2 (Ketjusääntö) Olkoon $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, $g = (g_1, \dots, g_n)$ pisteessä \bar{a} differentioituva funktio ja $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $g(\bar{a}) \in U \subset \circ \mathbf{R}^n$ pisteessä $g(\bar{a})$ differentioituva funktio. Tällöin $f \circ g$ on differentioituva pisteessä \bar{a} ja

$$D_i(f \circ g) = \sum_{j=1}^n (D_j f)(g(\bar{a})) (D_i g_j)(\bar{a}),$$

missä $i = 1, \dots, m$.

Esimerkki 3.5.3 Olkoot funktiot $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ja $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Nyt

$$D(f \circ g)(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Esimerkki 3.5.4 Olkoot $m = 1$, $n = 2$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + e^y + e^{xy}$ ja $g(t) = (t, 1 - t) = (g_1(t), g_2(t))$. Nyt

$$f \circ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f \circ g(t) = t^2 + e^{1-t} + e^{t(1-t)}$$

ja

$$D(f \circ g)(t) = 2t - e^{1-t} + (1 - 2t)e^{t-2t}.$$

Lauseen 3.5.2 avulla:

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 2x + ye^{xy} \\ D_2 f(x, y) = e^y + xe^{xy} \end{cases}, \quad \begin{cases} Dg_1(t) = 1 \\ Dg_2(t) = -1, \end{cases}$$

joten

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(t) &= (D_1 f)(g(t)) \cdot (Dg_1)(t) + (D_2 f)(g(t)) \cdot (Dg_2)(t) \\ &= (2t + (1 - t)e^{t(1-t)}) \cdot 1 + (e^{1-t} + te^{t(1-t)}) \cdot (-1) \\ &= 2t - e^{1-t} + (1 - 2t)e^{t-2t}. \end{aligned}$$

Jos g (sisäfunktio) on yhden muuttujan funktio, niin $f \circ g$ on myös yhden muuttujan funktio ja

$$D(f \circ g) = \sum_{j=1}^n (D_j f)(g(t)) g'(t).$$

Esimerkki 3.5.5 Oletetaan että $n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ ja funktio f on yhden muuttujan funktio, g skalaariarvoinen funktio. Tällöin $f \circ g$ on m :n muuttujan funktio,

$$f \circ g(x_1, \dots, x_m) = f(g(x_1, \dots, x_m))$$

ja

$$D_i f \circ g(\bar{x}) = f'(g(\bar{x})) \cdot D_i g(\bar{x}), \quad i = 1, \dots, m, \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Esimerkki 3.5.6 Määritellään funktiot f ja g siten, että

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}, & f(x) &= x^2 + \sin x \\ g : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}, & g(\bar{x}) &= x_1 - x_2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Nyt $n = 1$, $m = 3$ ja $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Yhdistetty kuvaus $f \circ g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ on

$$f \circ g(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + x_3^2)^2 + \sin(x_1 - x_2 + x_3^2).$$

Lasketaan tämän osittaisderivaatat:

$$f'(x) = 2x + \cos x$$

ja

$$D_1g(\bar{x}) = 1, \quad D_2g(\bar{x}) = -1 \text{ ja } D_3g(\bar{x}) = 2x_3,$$

joten

$$\begin{aligned} D_1(f \circ g)(\bar{x}) &= \left(2(x_1 - x_2 + x_3^2) + \cos(x_1 - x_2 + x_3^2)\right) \cdot 1 \\ D_2(f \circ g)(\bar{x}) &= -2(x_1 - x_2 + x_3^2) - \cos(x_1 - x_2 + x_3^2) \\ D_3(f \circ g)(\bar{x}) &= 2x_3 \cdot 2(x_1 - x_2 + x_3^2) + 2x_3 \cos(x_1 - x_2 + x_3^2). \end{aligned}$$

Lauseen 3.5.2 todistuksen idea:

Valitaan $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$ tarkastelupiste, $\bar{h} \in \mathbf{R}^m$ ”pieni muutos”.

$$(f \circ g)(\bar{a} + \bar{h}) - (f \circ g)(\bar{a}) = f(g(\bar{a} + \bar{h})) - f(g(\bar{a})) = f(g(\bar{a}) + \bar{k}) - f(g(\bar{a})), \quad (13)$$

missä $\bar{k} = g(\bar{a} + \bar{h}) - g(\bar{a})$. Kaikilla $j = 1, \dots, n$:

$$k_j = g_j(\bar{a} + \bar{h}) - g_j(\bar{a}).$$

Koska g_j on differentioituva

$$k_j = D_1g_j(\bar{a})h_1 + \dots + D_n g_j(\bar{a})h_m + \left| \bar{h} \right| \varepsilon_j(\bar{h}) = \sum_{i=1}^m D_i g_j(\bar{a})h_i + \left| \bar{h} \right| \varepsilon_j(\bar{h}). \quad (14)$$

Toisaalta myös f on differentioituva pisteessä $g(\bar{a})$, joten

$$\begin{aligned} f(g(\bar{a}) + \bar{k}) - f(g(\bar{a})) &= D_1f(g(\bar{a}))k_1 + \dots + D_n f(g(\bar{a}))k_n + \left| \bar{k} \right| \tilde{\varepsilon}(\bar{k}) \\ &= \sum_{j=1}^n (D_j f)(g(\bar{a}))k_j + \left| \bar{k} \right| \tilde{\varepsilon}(\bar{k}). \end{aligned} \quad (15)$$

Yhdistämällä kaavat (13), (14) ja (15) saadaan

$$f \circ g(\bar{a} + \bar{h}) - f \circ g(\bar{a}) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n D_j f(g(\bar{a})) D_i g_j(\bar{a}) \right)}_{(*)} h_i + \eta.$$

Pitkähkö tarkastelu osoittaa, että $\eta \rightarrow 0$ riittävän nopeasti, kun $\bar{h} \rightarrow 0$ (tarkemmin sanoen $\frac{\eta(\bar{h})}{|\bar{h}|} \rightarrow 0$ kun $\bar{h} \rightarrow 0$). Tämän jälkeen Differentioituvuuden määritelmästä seuraa

$$(*) = D_i(f \circ g)(\bar{a}).$$

Esimerkki 3.5.7 Olkoon $f(x, y) = x^2y - y^3$. Laske funktion $t \mapsto f(2t^3 - 5t, t^4 + 3t + 7)$ derivaatta, kun $t = -2$.

Ratkaisu. Merkitään

$$h(t) = f(2t^3 - 5t, t^4 + 3t + 7) = f \circ g(t),$$

missä

$$g(t) = (2t^3 - 5t, t^4 + 3t + 7) =: (g_1(t), g_2(t)).$$

Lauseesta 3.5.2 seuraa

$$h'(t) = D_1f(g(t))g_1'(t) + D_2f(g(t))g_2'(t).$$

Nyt

$$\begin{aligned} g_1' &= 6t^2 - 5; & g_2' &= 4t^3 + 3 \\ D_1f(x, y) &= 2xy; & D_2f(x, y) &= x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-6, 3) \\ D_1f(-6, 3) &= -36; & D_2f(-6, 3) &= 9 \\ g_1'(-2) &= 19; & g_2'(-2) &= -29 \end{aligned}$$

Joten

$$h'(-2) = -36 \cdot 19 + 9 \cdot (-29) = -945.$$

Esimerkki 3.5.8 Olkoon $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ differentioituva ja $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ määritelty kaavalla

$$h(x, y) = f(x^2 - y^2, xy^2, 2y); \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Laske D_1h ja D_2h funktion f derivaattojen avulla.

Ratkaisu. Pätee $h = f \circ g$, missä

$$g(x, y) = (x^2 - y^2, xy^2, 2y).$$

Ketjusääntö: (h :n osittaisderivaatta x :n suhteen $i = 1$ ketjusäännössä)

$$\begin{aligned} D_1 h(x, y) &= D_1 f(g(x, y)) D_1 g_1(x, y) + D_2 f(g(x, y)) D_1 g_2(x, y) \\ &\quad + D_3 f(g(x, y)) D_1 g_3(x, y) \\ &= 2x D_1 f(g(x, y)) + y^2 D_2 f(g(x, y)). \end{aligned}$$

Vastaavalla laskulla kun $i = 2$

$$D_2 h(x, y) = -2y D_1 f(g(x, y)) + 2xy D_2 f(g(x, y)) + 2 D_3 f(g(x, y)).$$

4 Käyrät, tasa-arvopinnat ja tangenttitaso

Määritelmä 4.0.9 Olkoon $\Delta \subset \mathbf{R}$ väli (rajoitettu tai rajoittamaton) ja $f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}^2$ jatkuva. Silloin joukko $\Gamma := f(\Delta)$ on *jatkuva* käyrä. Yhtälöpari

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}, \quad t \in \Delta$$

on käyrän Γ *parametrisitys*, t *parametri*.

Esimerkki 4.0.10 Määritellään

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2 + 3t \\ f_2(t) &= 1 + 2t, \quad t \in [0, 1] =: \Delta. \end{aligned}$$

Sillon Γ on jana, katso kuva 11. Jos

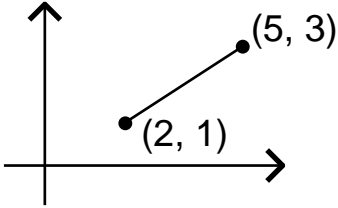
$$\begin{aligned} f_1(t) &= x_1 + (x_2 - x_1)t \\ f_2(t) &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \end{aligned}$$

niin Γ on jana, jonka päätepisteet ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) .

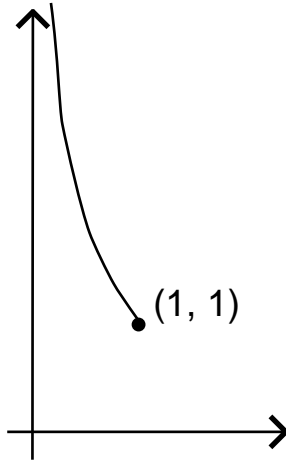
Esimerkki 4.0.11 Määritellään

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 10 \cos t \\ f_2(t) &= 10 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Nyt Γ on ympyrä jonka keskipiste on $\bar{0}$ ja säde 10.



Kuva 11: jana Γ



Kuva 12: käyrä $f(t) := (t, \frac{1}{t})$

Huomautus 4.0.12 Sanotaan, että Γ on *rajoitettu*, jos se sisältyy johonkin kiekkoon $B(0, R)$ (jollekin $R \in \mathbf{R}^+$), muuten Γ on *rajoittamaton*.

Jos Δ on suljettu ja rajoitettu, niin f :n jatkuvuudesta seuraa, että Γ on rajoitettu. (Tämän asian todistus jätetään väliin.)

Esimerkki 4.0.13 Määritellään

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t & \text{ja} & & \Delta &=]0, 1[\\ f_2(t) &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Katso kuva 12.

Olkoon $\Delta = [a, b]$. Jos $f(a) = f(b)$, niin käyrä on *umpinainen*. Jos f on injektio, niin käyrää Γ sanotaan *kaareksi*.

Olkoon $\tau := [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ sellainen jatkuva surjektio, että $\tau(\alpha) = a$ ja $\tau(\beta) = b$. Silloin

$$\Gamma = g([\alpha, \beta]),$$

missä $g := f \circ \tau$. Sanotaan, että käyrälle Γ on tehty parametrin vaihto.

Esimerkki 4.0.14 Määritellään

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 10 \cos t \\ f_2(t) &= 10 \sin t \end{aligned}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

ja

$$\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi] \quad \tau(s) = 2\pi s.$$

Tällöin

$$g = f \circ \tau : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

ja

$$\begin{aligned} g_1(s) &= 10 \cos 2\pi s \\ f_2(s) &= 10 \sin 2\pi s \end{aligned}, \quad s \in [0, 1].$$

Parametrin vaihto on sallittu muulloinkin kuin suljetun välin tapauksessa.

Vastaavasti määritellään avaruuskäyrät: Jos

$$f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}^3$$

on jatkuva, niin käyrä Γ on joukko $\Gamma = f(\Delta)$. Edellä mainitut termit käyvät myös tässä.

Olkoon

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Määritelmä 4.0.15 Olkoon L pisteen $f(s)$ kautta kulkeva suora, suuntavektori $\bar{\alpha}$. Tällöin L on Γ :n tangentti pisteessä $f(s)$, jos pisteiden $f(s)$ ja $f(r)$ kautta kulkevan suoran L_r suuntavektorille $\bar{\beta}(r)$ pätee:

$$\lim_{r \rightarrow s} \bar{\beta}(r) = \bar{\alpha}.$$

Lause 4.0.16 Yllä olevassa tilanteessa

$$\bar{\alpha} = (x'(s), y'(s)),$$

(mikäli ainakin toinen komponenteista $\neq 0$).

Todistus.

$$\bar{\beta}(r) \uparrow\uparrow (x(r) - x(s), y(r) - y(s)) \Rightarrow \bar{\beta}(r) \uparrow\uparrow \left(\frac{x(r) - x(s)}{r - s}, \frac{y(r) - y(s)}{r - s} \right),$$

ja viimeksi mainittu vektori lähestyy vektoria

$$(x'(s), y'(s)),$$

kun $r \rightarrow s$. \square

\mathbf{R}^3 :ssa \bar{x} on pisteen \bar{x}_0 kautta kulkevan suoran S piste jos ja vain jos $\bar{x} = t\bar{\alpha} + \bar{x}_0$, missä $\bar{\alpha} \neq 0$ on suoran suuntavektori.

Avaruuskäyrän $t \mapsto \bar{x}(t)$ tangentti(suora) määritellään kuten määritelmässä 4.0.15 ja pisteessä $\bar{x}(s)$ tangentti on vektorin

$$(x'_1(s), x'_2(s), x'_3(s))$$

suuntainen.

Esimerkki 4.0.17 Olkoon $t \in [1, 10]$ ja $\bar{x}(t) := (t, t^2, t^3)$. Kun $t = 2$, on tangentin suuntavektori

$$(x'_1(2), x'_2(2), x'_3(2)) = (1, 4, 12).$$

Katso kuva 13.

Palataan tasokäyriin. Jatkuva käyrä esitetään usein muodossa

$$f(x, y) = 0,$$

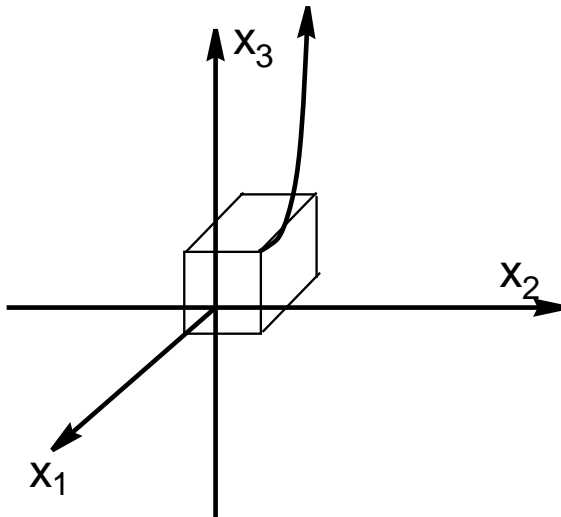
missä piste $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ kuuluu käyrälle ja funktio f on jossain $A \subset \mathbf{R}^2$ määritelty jatkuva funktio.

Esimerkki 4.0.18 Nollakeskeinen R -säteinen ympyrä tasossa:

a) $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

b) $x(t) = R \cos t$

$$y(t) = R \sin t, t \in [0, 2\pi].$$



Kuva 13: Tangentin suuntavektori

Vastaavasti, jos $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ jatkuva, niin joukko

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

on käyrä, kun $c \in \mathbf{R}$ ja f toteuttaa tiettyjä ehtoja. Näitä käyriä sanotaan funktion f tasa-arvokäyriksi.

Osoitamme seuraavaksi, että funktion f gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan:

Oletetaan, että $c \in \mathbf{R}$ on kiinteä ja että vastaavalla tasa-arvokäyrällä on parametriesitys

$$t \mapsto (x(t), y(t)), \quad t \in \Delta.$$

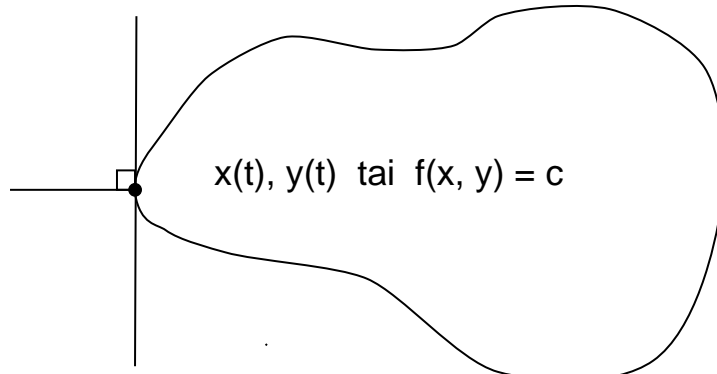
Oletetaan, että $x(t)$ ja $y(t)$ ovat derivoituvia. Koska

$$f(x(t), y(t)) = c \quad \forall t \in \Delta,$$

niin

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df(x(t), y(t))}{dt} \\ &= (D_1 f)(x(t), y(t))x'(t) + (D_2 f)(x(t), y(t))y'(t) \\ &= (\nabla f)(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)). \end{aligned}$$

Näin ollen tangenttivektori on kohtisuorassa funktion f gradientti vektoria vastaan (jos $x'(t) \neq 0$ tai $y'(t) \neq 0$). Katso kuva 14.



Kuva 14: Gradientti

4.1 Pinnat

Määritelmä 4.1.1 Avaruuden \mathbf{R}^3 suljettu osajoukko S on pinta, jos jokaisella $\bar{a} \in S$ on ympäristö V joka on homeomorfinen neliön $]0, 1[\times]0, 1[$ ($=: I^2$) kanssa. On olemassa jatkuva bijektio $V \rightarrow I^2$.

Tarkastellaan nyt pintoja, jotka voidaan esittää muodossa

$$S := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\},$$

missä $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva, $A \subset \mathbf{R}^3$.

Esimerkki 4.1.2 Ellipsoidi

$$\underbrace{\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2}}_{=:f} - 1 = 0.$$

Katso kuva 15.

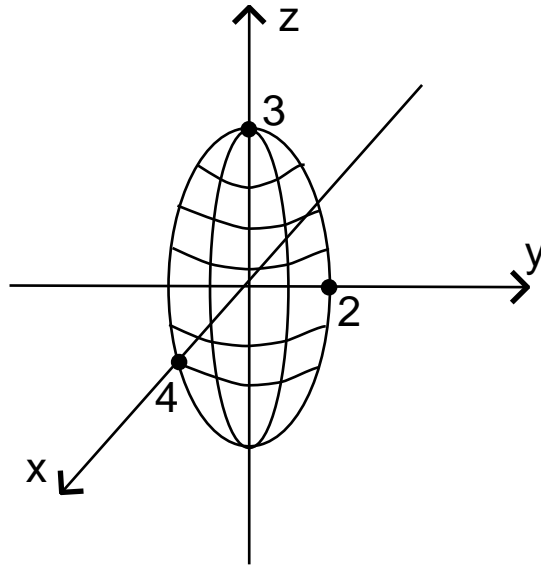
Esimerkki 4.1.3 Jos $g : B \rightarrow \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}^2$, niin yhtälö

$$g(x, y) = z$$

määrittelee pinnan. Tämä voidaan näet kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{g(x, y) - z}_{=:f} = 0.$$

Pinta on nimeltään g :n kuvaaja.



Kuva 15: Ellipsoidi

4.2 Tangenttitasot

Olkoon S pinta

$$\{f(x, y, z) = 0\}.$$

Olkoon $(a, b, c) \in S$ pinnan piste. (Huom! $f(a, b, c) = 0$). Tarkoituksemme on johtaa tässä pisteessä olevan pinnan S tangenttitason yhtälö. Tarkastellaan käyrää $\Gamma \subset S$, joka kulkee pisteen (a, b, c) kautta. Oletetaan, että Γ :lla on derivoituva parametriesitys

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, \quad t \in \Delta.$$

Olkoon $t_0 \in \Delta$ sellainen piste, että

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (a, b, c).$$

Koska $\Gamma \subset S$, niin

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \forall t \in \Delta,$$

ja tästä saadaan

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{df(x(t), y(t), z(t))}{dt} \\
 &= (D_1t)(x(t), y(t), z(t))x'(t) + (D_2t)(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\
 &\quad + (D_3t)(x(t), y(t), z(t))z'(t) \\
 &= (\nabla f)(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)).
 \end{aligned}$$

Kun $t = t_0$, saadaan

$$(\nabla f)(a, b, c) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0$$

joten kaikkien yllä mainittujen käyrien tangentit ovat kohtisuorassa gradienttia $(\nabla f)(a, b, c)$ vastaan.

Tangenttitason yhtälö

Merkitään

$$\bar{r}_0 := (a, b, c) = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}.$$

Olkoon $\bar{r} = (x, y, z)$ tangenttitason T piste. Siis

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in T &\iff \bar{r} - \bar{r}_0 \perp \nabla f(a, b, c) \\
 &\iff \nabla f(a, b, c) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0 \\
 &\iff D_1f(a, b, c)(x - a) + D_2f(a, b, c)(y - b) + D_3f(a, b, c)(z - c) = 0.
 \end{aligned}$$

Tämä on T :n yhtälö.

Esimerkki 4.2.1 Määritellään pinta

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} - 1 = 0.$$

Haluamme muodostaa tangenttitason yhtälön pisteessä $(a, b, c) = (2, 1, \frac{3}{\sqrt{2}})$.

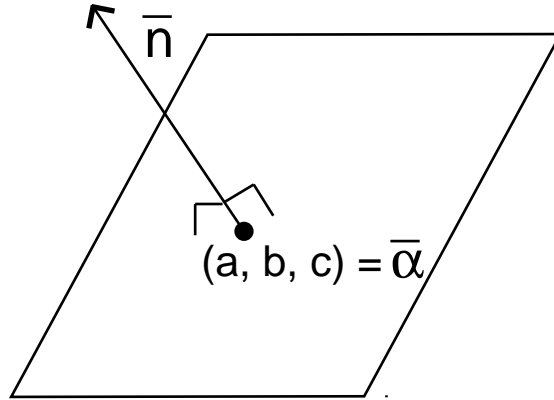
$$\begin{aligned}
 (\nabla f)(x, y, z) &= \left(\frac{x}{8}, \frac{y}{2}, \frac{2z}{9} \right) \\
 (\nabla f)\left(2, 1, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right).
 \end{aligned}$$

T :n yhtälö

$$\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(z - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

eli

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}z - 2 = 0.$$



Kuva 16: Taso T

Esimerkki 4.2.2 Olkoon $g : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}^2$, g differentioituva. Tarkastellaan pintaa S , joka on funktion g kuvaaja,

$$S = \{(x, y, z) \mid \underbrace{g(x, y) - z}_{=: f(x, y, z)} = 0\}$$

Nyt

$$(\nabla f)(a, b, c) = \left((D_1g)(a, b), (D_2g)(a, b), -1 \right).$$

Pisteen $(a, b, g(a, b))$ kautta kulkevan tangenttitason yhtälö on näin ollen

$$D_1g(a, b)(x - a) + D_2g(a, b)(b - y) = z - c.$$

Tason T yhtälö \mathbf{R}^3 :ssa yleisesti

T :n määrää:

- annettu piste $\bar{\alpha}$, joka kuuluu tasoon
- normaalivektori \bar{n} , joka on kohtisuorassa jokaista tasossa T kulkevaa suoraa vastaan.

Oletetaan että nämä annettu: Olkoon $\bar{x} \in \mathbf{R}^3$ mielivaltainen tason T piste. Silloin \bar{x} toteuttaa yhtälön:

$$(\bar{x} - \bar{\alpha}) \cdot \bar{n} = 0$$

eli

$$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 - \overbrace{\alpha \cdot \bar{n}}^{\in \mathbf{R}} = 0.$$

Yleisesti siis tason yhtälö on muotoa

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

missä $A, B, C, D \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 4.2.3 Määritellään $\bar{\alpha} = (2, 2, 1)$ ja $\bar{n} = \bar{k} = (0, 0, 1)$. Nyt $n_1 = n_2 = 0$, $\bar{\alpha} \cdot \bar{n} = 1$. Yhtälö:

$$z = 1.$$

(Piste (x, y, z) kuuluu tasoon, jos ja vain jos $z = 1$).

Suoran yhtälö \mathbf{R}^3 :ssa

Pisteen $\bar{\alpha}$ kautta kulkevan, vektorin $\bar{\beta}$ suuntaisen suoran L yhtälö on

$$\bar{x} = t\bar{\beta} + \bar{\alpha}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (16)$$

Toisin sanoen, $\bar{x} \in L$ jos ja vain jos on olemassa luku t siten, että (16) toteutuu.

Voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{x_1 - \alpha_1}{c_1} = \frac{x_2 - \alpha_2}{c_2} = \frac{x_3 - \alpha_3}{c_3}$$

jollekin $c_j \in \mathbf{R}$.

5 Väliarvolause

Lause 5.0.4 Olkoon $A \subset \circ \mathbf{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ differentioituva, ja olkoot $\bar{a}, \bar{b} \in A$ sellaisia pisteitä, että niiden yhdysjana sisältyy A :han. Tällöin on olemassa $\theta \in [0, 1]$, jolle

$$f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a} + \theta(\bar{b} - \bar{a})) \cdot (\bar{b} - \bar{a}). \quad (17)$$

Huomautus 5.0.5 1) Lause 5.0.4 pätee, kun \mathbf{R}^2 muutetaan \mathbf{R}^n :ksi.

2) Jos merkitään $\bar{b} - \bar{a} = \bar{h}$, niin (17) pätee jos ja vain jos

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a} + \theta\bar{h}) \cdot \bar{h}.$$

Lauseen 5.0.4 todistus:

Todistus. Olkoon pisteiden \bar{a} ja \bar{b} yhdysjana

$$J = \{\bar{a} + th \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Määritellään derivoituva funktio $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$g(t) = f(\bar{a} + t\bar{h}) \quad (= f(\bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}))).$$

Ketjusäännön mukaan

$$g'(t) = D_1 f(\bar{a} + t\bar{h})h_1 + D_2(\bar{a} + t\bar{h})h_2 = \nabla f(\bar{a} + t\bar{h}) \cdot \bar{h}.$$

Toisaalta väliarvolauseesta seuraa, että on olemassa $\theta \in]0, 1[$, jolle

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)(1 - 0) = g'(\theta).$$

Saamme

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \nabla f(\bar{a} + \theta\bar{h}) \cdot \bar{h}.$$

□

Esimerkki 5.0.6 Jos $|\nabla f(\bar{a})| \leq M$ tarkastelualueessa (ainakin janalla J), missä M on jokin positiivinen vakio, niin

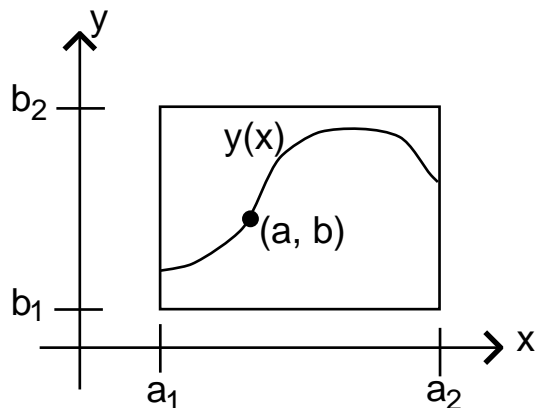
$$\begin{aligned} |f(\bar{b}) - f(\bar{a})| &= \left| \nabla f(\bar{a} + \theta(\bar{b} - \bar{a})) \cdot (\bar{b} - \bar{a}) \right| \\ &\leq \left| \nabla f(\bar{a} + \theta(\bar{b} - \bar{a})) \right| |\bar{b} - \bar{a}| \\ &\leq M |\bar{b} - \bar{a}|. \end{aligned}$$

Kaavaa voidaan soveltaa fysiikan virhearvioinneissa: \bar{b} on jokin mitattu suure, \bar{a} sen tarkka arvo, $|\bar{b} - \bar{a}|$ mittausrvirhe (josta on jonkinlainen käsitys olemassa). Lauseke $f(\bar{a})$ on etsitty suure, ja edellä mainitun kaavan mukaan $M|\bar{b} - \bar{a}|$ on yläraja arvio virheelle, joka tehdään, kun $f(\bar{a})$:n likiarvo $f(\bar{b})$ lasketaan mittaustuloksen \bar{b} perusteella.

5.1 Implisiittifunktiolause

Lause 5.1.1 Olkoon $A \subset \circ \mathbf{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva. Olkoon (a, b) piste, joka on f :n nollakohta, $f(a, b) = 0$. Oletetaan, että $D_2 f(a, b) \neq 0$. Tällöin on olemassa sellainen suorakulmio

$$D = \{(x, y) \mid a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2\} \subset \mathbf{R}^2,$$



Kuva 17: Suorakulmio D

$(a, b) \in D$, että jokaista $x \in]a_1, a_2[$ kohti yhtälöllä

$$f(x, y) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y(x) \in]b_1, b_2[$. Funktio $x \mapsto y(x)$ on jakuvasti derivoituva välillä $]a_1, a_2[$.

Huomautus. Siis funktio $x \mapsto y(x)$ toteuttaa $f(x, y(x)) = 0, \forall x \in]a_1, a_2[$. Katso kuva 17.

Esimerkki 5.1.2 Funktion

$$f(x, y) = y^5 + xy - 4 = 0$$

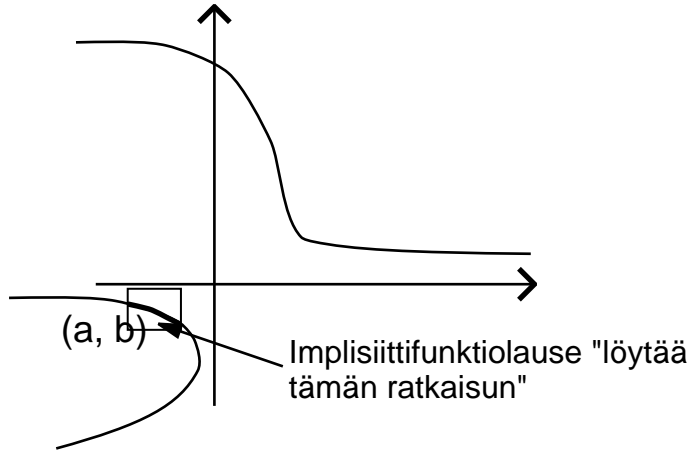
ratkaisupisteet tasossa: Katso kuva 18.

Yhtälön koko ratkaisu ei ole minkään yhden muuttujan funktion kuvaaja!

Lauseen 5.1.1 todistus.

Todistus. Oletetaan että $D_2f(a, b) > 0$. Koska D_2f on jatkuva, tästä seuraa että on olemassa $r > 0$ siten, että $D_2f(x, y) > 0$, kun $(x, y) \in B(\bar{\alpha}, r)$ (tässä $\bar{\alpha} := (a, b)$). Tarkastellaan funktioita $y \mapsto f(a, y)$; yllä olevan nojalla se on aidosti kasvava b :n n -ympäristössä. Olkoon $b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ sellaisia, että

$$b - \frac{r}{2} < b_1 < b < b_2 < b + \frac{r}{2}.$$



Kuva 18: Ratkaisupisteet

Tällöin

$$f(a, b_1) < 0 = f(a, b) < f(a, b_2).$$

Koska f jatkuva, niin on olemassa sellaiset luvut a_1, a_2 ,

$$a - \frac{r}{2} < a_1 < a < a_2 < a + \frac{r}{2},$$

että

$$f(x, b_1) < 0, \quad f(x, b_2) > 0,$$

kun $a_1 < x < a_2$. Olkoon $x \in]a_1, a_2[$. Nyt pätee

1. $f(x, b_1) < 0, f(x, b_2) > 0$
2. $\varphi : y \mapsto f(x, y)$ on jatkuva välillä $]b_1, b_2[$
3. $\varphi : y \mapsto f(x, y)$ on aidosti kasvava.

Tästä seuraa, että on olemassa $y = y(x) \in]b_1, b_2[$, jolle $\varphi(y(x)) = 0$ eli $f(x, y(x)) = 0$. Todistus sille, että $y(x)$ on derivoituva, sivuutetaan. \square

Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \circ \mathbf{R}^2$, $f(a, b) = 0$ ja $D_2f(a, b) \neq 0$. Implisiittifunktiolauseesta siis seuraa, että yhtälöllä $f(x, y) = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu $y(x)$ jokaista $x \in]a_1, a_2[$ kohti. Funktio $x \mapsto y(x)$ on jatkuvasti derivoituva. Derivaatan $y'(x)$ laskeminen:

Pätee $f(x, y(x)) = 0$, joten

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = D_1f(x, y(x)) \cdot 1 + (D_2f)(x, y(x)) \cdot y'(x)$$

mistä seuraa

$$y'(x) = \frac{-D_1f(a, b)}{D_2f(a, b)}.$$

Esimerkki 5.1.3 Tarkastellaan yhtälöä

$$xy - \sin(x + y) = 0 \tag{18}$$

Tällä on ratkaisu $x = y = 0$. Osoitetaan, että kyseessä oleva yhtälö määrittelee y :n x :n funktiona jossakin pisteen nolla ympäristössä ja lasketaan $y'(0)$.

Ratkaisu. Pätee $f(0, 0) = 0$ (Lause 5.1.1 kun $a = 0, b = 0$) ja $D_2f(x, y) = x - \cos(x + y)$, $D_2f(0, 0) = -1 \neq 0$. Lause 5.1.1 soveltuu, joten yhtälö (18) määrittelee y :n x :n funktiona.

$$y'(0) = \frac{D_1f(0, 0)}{D_2f(0, 0)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

ja

$$D_1f = y - \cos(x + y).$$

Tapaus, jossa implisiittilause EI toimi:

Tarkastellaan yhtälöä

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 9 = 0 \tag{19}$$

pisteessä $(x, y) = (6, 0)$. Nyt

$$D_2f(x, y) = 2y, \quad D_2f(6, 0) = 0,$$

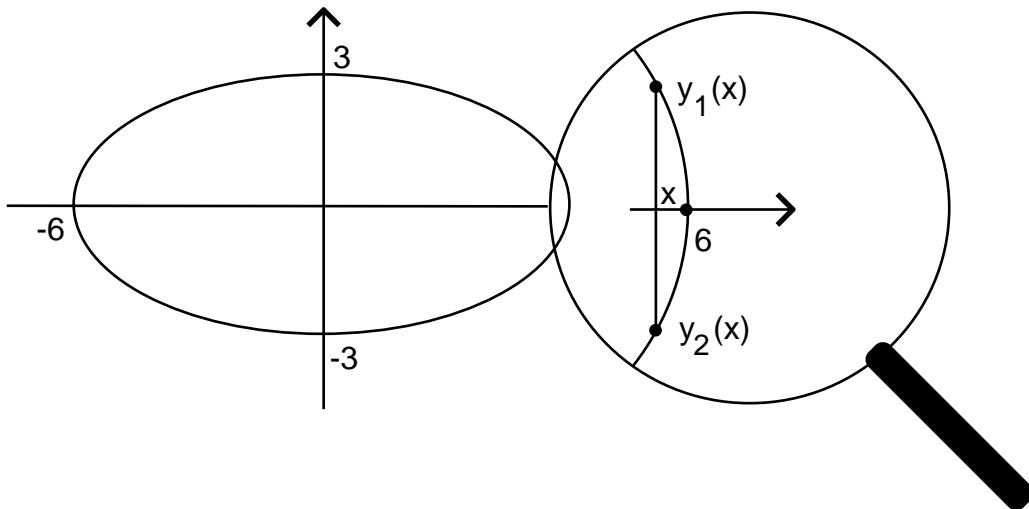
joten implisiittifunktiolauseen oletukset eivät ole voimassa.

Huomautus 5.1.4 Yhtälön (19) ratkaisupisteet muodostavat ellipsin tasoon. Katso kuva 19. Eli y ei ole yksikäsitteinen x :n funktio.

Lause 5.1.5 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle pisteessä $(\bar{a}, b) \in A \subset \mathbf{R}^{n+1}$

$$f(\bar{a}, b) = 0, \quad D_{n+1}f(\bar{a}, b) \neq 0.$$

Tällöin on olemassa \bar{a} :n ympäristö $B(\bar{a}, r) \subset \mathbf{R}^n$ ja avoin väli $]b_1, b_2[\ni b$ siten, että jokaisella $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$ yhtälöllä $f(\bar{x}, y) = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu $y(\bar{x}) \in]b_1, b_2[$.



Kuva 19: Ellipsi

Derivaatoille pätee:

$$D_i y(\bar{x}) = -\frac{D_i f(\bar{x}, y(\bar{x}))}{D_{n+1} f(\bar{x}, y(\bar{x}))} \quad i = 1, \dots, n.$$

Lausetta 5.1.5 voidaan käyttää, kun halutaan varmistaa, että yhtälön $f(x, y, z) = 0$ ratkaisut muodostavat pinnan \mathbf{R}^3 :ssa (vertaa luku 4).

Esimerkki 5.1.6 Yhtälö

$$f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2+z^2} = 0$$

määrittelee z :n muuttujien x ja y funktiona eräässä $(0, 0, 0)$:n ympäristössä, sillä

$$f(0, 0, 0) = 0 \cdot e^0 = 0,$$

eli yhtälö toteutuu. Nyt

$$\begin{aligned} D_3 f(x, y, z) &= e^{x^2+y^2+z^2} + z \cdot 2ze^{x^2+y^2+z^2} \\ D_3 f(0, 0, 0) &= 1 \neq 0 \\ D_1 f(x, y, z) &= 2xze^{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}$$

Siis voidaan ratkaista $z = z(x, y)$, kun (x, y) on pisteen $(0, 0)$ jossain ympäristössä. Derivaatalle saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = D_1 z(0, 0) = -\frac{D_1 f(0, 0, 0)}{D_3 f(0, 0, 0)} = -\frac{0}{1} = 0.$$

6 Ääriarvojen teoriaa

Tutkitaan aluksi *neliömuotoja* kahden muuttujan x, y tapauksessa:

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (20)$$

missä $a, b, c \in \mathbf{R}$ annettuja kertoimia.

Esimerkki 6.0.7 Määritellään

$$P(x, y) = 2x^2 - 10xy + 3y^2.$$

Nähdään että $P(0, 0) = 0$

1. Jos $P(x, y) \neq 0$ aina, kun $(x, y) \neq (0, 0)$, niin P on *definiitti*.
 - a) Jos $P(x, y) > 0$ aina, kun $(x, y) \neq (0, 0)$, niin P on *positiivisesti definiitti*.
 - b) Jos $P(x, y) < 0$ aina, kun $(x, y) \neq (0, 0)$, niin P on *negatiivisesti definiitti*.
2. Jos $P(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ tai jos $P(x, y) \leq 0 \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, niin P on *semidefiniitti*. (Huomautus! Jos P on definiitti, on se myös semidefiniitti.)
3. Jos P saa positiivisia ja negatiivisia arvoja, se on *indefiniitti*.

Yleisemmin, neliömuoto \mathbf{R}^n :ssä on muotoa

$$P(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} x_i x_j,$$

missä A on $n \times n$ matriisi $(a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Lause 6.0.8 Neliömuoto (20) on

Definiitti, jos $ac - b^2 > 0$,

semidefiniitti, jos $ac - b^2 = 0$,

indefiniitti, jos $ac - b^2 < 0$.

Merkitään $D := ac - b^2$.

Todistus. Oletetaan, että $D > 0$. Silloin $a \neq 0$ ja $P(x, y)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x, y) = \frac{1}{a}[(ax + by)^2 + Dy^2].$$

Jos $P(x, y) = 0$, niin

$$0 = aP(x, y) = (ax + by)^2 + Dy^2.$$

Tämä on mahdollista vain jos $Dy^2 = 0$ ja $(ax + by)^2 = 0$ eli $y = 0$ ja $(ax + 0)^2 = 0$ eli $y = 0$ ja $x = 0$ (koska $a \neq 0$).

Oletetaan nyt $D < 0$ ja $a \neq 0$. Tällöin

$$P(x, y) = \frac{1}{a}((ax + by)^2 + Dy^2) = \frac{1}{a}((ax + by) - \sqrt{|D|}y)((ax + by) + \sqrt{|D|}y).$$

Nähdään, että P häviää xy -tason suorilla

$$ax + (b - \sqrt{|D|})y = 0 \text{ ja } ax + (b + \sqrt{|D|})y = 0.$$

Siis P on indefiniitti.

Tapaus $a = 0$, $D < 0$. Tällöin

$$P(x, y) = y(2bx + cy).$$

Koska $D = ac - b^2 < 0$ ja $a = 0$, niin täytyy olla $b \neq 0$. Otetaan $y = 1$:

$$P(x, 1) = 2bx + c,$$

joka saa negatiivisia ja positiivisia arvoja kun $x \in \mathbf{R}$. P on siis indefiniitti.

Tapaus $D = 0$.

1. Jos $a \neq 0$, niin $P(x, y) = \frac{1}{a}(ax + by)^2$,
2. Jos $a = 0$, niin $P(x, y) = cy^2 \Rightarrow b = 0$.

Selvästikin P on semidefiniitti. \square

Esimerkki 6.0.9 Määritellään

$$P(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2.$$

Nyt $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$ ja $D = 2 - 9 = -7$, eli P on indefiniitti. $P(x, y)$ häviää suorilla

$$y = \left(\frac{1}{3 \pm \sqrt{7}} \right) x.$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} P(1, 1) &= 1 - 6 + 2 = -3 < 0 \\ P(1, -1) &= 1 + 6 + 2 = 9 > 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 6.0.10 Määritellään

$$P(x, y) = 4xy - 4x^2 - y^2.$$

Nyt $a = -4$, $b = 2$, $c = -1$ ja $D = 4 - 4 = 0$ (semidefiniitti). Itseasiassa $P(x, y) = -(2x - y)^2$, mistä nähdään

- (i) $P(x, y) \leq 0 \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$
- (ii) $P(50, 100) = -(100 - 100)^2 = 0$.

Esimerkki 6.0.11 Määritellään

$$P(x, y) = 2xy - 3x^2 - y^2.$$

Nyt $a = -3$, $b = 1$, $c = -1$ ja $D = 2 > 0$ (definiitti). Esimerkiksi $P(1, 1) = -2 < 0$. Siis $P(x, y) < 0$, kun $(x, y) \neq \bar{0}$.

6.1 Taylorin kaava

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ funktio, jolla on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat. Olkoon $\bar{x} \in A$ tarkastelupiste ja $\bar{h} \in \mathbf{R}^2$ siten, että jana

$$J := \{\bar{x} + t\bar{h} \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

J on jana, jonka päätepisteet ovat \bar{x} ja $\bar{x} + \bar{h}$. Määritellään

$$\begin{aligned} g &: [0, 1] \rightarrow A \\ g(t) &= \bar{x} + t\bar{h} \\ g(0) &= \bar{x} \\ g(1) &= \bar{x} + \bar{h}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan funktiota

$$f \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R},$$

joka on mielivaltaisen monta kertaa derivoituva yhden muuttujan funktio.

Ketjusäännön mukaan

$$(f \circ g)' = (D_1 f) \circ g \cdot g'_1 + (D_2 f) \circ g \cdot g'_2 = h_1(D_1 f) \circ g + h_2(D_2 f) \circ g.$$

Huomautus 6.1.1

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (x_1 + th_1, x_2 + th_2),$$

missä $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$ ja $g'_1 = h_1$, $g'_2 = h_2$. Edelleen

$$\begin{aligned}(f \circ g)'' &= h_1 \frac{d}{dt}(D_1 f \circ g) + h_2 \frac{d}{dt}(D_2 f \circ g) \\ &= h_1 (h_1(D_{11}f) \circ g + h_2(D_{12}f) \circ g) + h_2 (h_1(D_{21}f) \circ g + h_2(D_{22}f) \circ g) \\ &= h_1^2(D_{11}f) \circ g + 2h_1h_2(D_{12}f) \circ g + h_2^2(D_{22}f) \circ g \\ &= ((h_1D_1 + h_2D_2)^2 f) \circ g,\end{aligned}$$

missä $D_1^2 = D_{11}$, $D_1D_2 = D_{12} = D_2D_1$ ja $D_2^2 = D_{22}$. Induktiolla voidaan todistaa kaava

$$(f \circ g)^{(k)} = ((n_1D_1 + h_2D_2)^k f) \circ g.$$

Taylorin kaavasta yhden muuttujan funktiolle $F : B \rightarrow \mathbf{R}$, missä $[0, 1] \subset B \subset \mathbf{R}$, saadaan

$$F(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta), \quad (21)$$

missä $\theta \in]0, 1[$ (jos $n = 1$, tämä on väliarvolause).

Jos F toteuttaa tietyt (ankarat) vaatimukset, sille pätee kehitemä

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0)x^k,$$

missä $x \in B(0, r)$.

Taylorin kehitemä (21) pätee funktiolle F , jos se on n kertaa jatkuvasti derivoituva. Sovelletaan tätä, kun $F := f \circ g$:

$$(f \circ g)(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f \circ g)^{(k)}(0)}{k!} + \frac{(f \circ g)^{(n)}(\theta)}{n!}.$$

Sijoittamalla k :nen derivaatan lauseke ja ottamalla huomioon

$$g(0) = \bar{x}, \quad g(1) = \bar{x} + \bar{h}, \quad g(\theta) = \bar{x} + \theta\bar{h},$$

saadaan

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + \bar{h}) &= f(g(1)) = f \circ g(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (h_1D_1 + h_2D_2)^k f(\bar{x}) + \frac{1}{n!} (h_1D_1 + h_2D_2)^n f(\bar{x} + \theta\bar{h}),\end{aligned}$$

missä $\theta \in]0, 1[$. Tämä kehitemä pätee, kun f on n kertaa jatkuvasti derivoituva. Arvolla $n = 2$ kehitemästä seuraa

Lause 6.1.2 Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \circ \mathbf{R}^2$, kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva. Olkoon $\bar{x} \in A$, $\bar{h} \in \mathbf{R}^2$ ja $\bar{h} \in B(\bar{0}, r)$, missä r on niin pieni, että $\bar{x} + B(\bar{0}, r) \subset A$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x}) &= h_1 D_1 f(\bar{x}) + h_2 D_2 f(\bar{x}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(h_1^2 D_{11} f(\bar{x}) + 2h_1 h_2 D_{12} f(\bar{x}) + h_2^2 D_{22} f(\bar{x}) \right) \\ &\quad + |\bar{h}|^2 \varepsilon(h), \end{aligned}$$

missä $\varepsilon(\bar{h}) \rightarrow 0$, kun $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$.

6.2 Ääriarvoista

Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \circ \mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}$. Tällöin

- funktiolla f on (lokaali)maksimi pisteessä $a \in A$, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$, kun $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$
- funktiolla f on (lokaali)minimi pisteessä $a \in A$, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, kun $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$
- ääriarvo on minimi tai maksimi
- ääriarvopiste on lähtöjoukon piste, jossa ääriarvo saavutetaan
- ääriarvo on oleellinen, jos $f(\bar{x}) \neq f(\bar{a})$, kun $\bar{x} \in B(\bar{a}, r) \setminus \{\bar{a}\}$ (tässä r kuten maksimin tai minimin määrittelyssä).

Lause 6.2.1 Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \circ \mathbf{R}^m$, kerran derivoituva. Jos $\bar{a} \in A$ on f :n ääriarvopiste, niin $D_i f(\bar{a}) = 0$, kun $i = 1, \dots, m$.

Esimerkki 6.2.2 Määritellään

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Nyt

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2x \\ D_2 f(x, y) &= 2y \\ D_j f(0, 0) &= 0, \quad \text{kun } j = 1, 2 \end{aligned}$$

Tunnetusti f :llä on lokaali minimi pisteessä $\bar{0}$.

Esimerkki 6.2.3 Määritellään

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Nyt pätee $D_1f(0, 0) = 0 = D_2f(0, 0)$. Toisaalta $(0, 0)$ ei ole ääriarvopiste:

$$\begin{aligned} f(0, r) &= -r^2 < 0 \\ f(r, 0) &= r^2 > 0 \end{aligned}$$

Lauseen 6.2.1 todistus:

Todistus. Tehdään antiteesi: Oletetaan että $\bar{a} \in A$ on A :n ääripiste ja $D_kf(\bar{a}) \neq 0$, jollekin $k \in \{1, \dots, m\}$. Määritellään funktio

$$g(x) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_m) \quad (22)$$

missä $x \in B(a_k, r) \subset \mathbf{R}$ jollakin $r > 0$.

Nyt

$$\frac{dg}{dx}(a_k) = D_kf(\bar{a}) \neq 0.$$

Näin ollen g saa a_k :n ympäristössä sekä suurempia että pienempiä arvoja kuin $g(a_k)$. Kohdan 22 nojalla sama pätee funktiolle f , joten \bar{a} ei ole funktion f ääriarvopiste. \square

Lause 6.2.4 Olkoon $A \subset \circ \mathbf{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Oletetaan että funktiolla f on jatkuvat kertaluvun 1. ja 2. osittaisderivaatat. Jos pisteessä $\bar{a} \in A$ pätee

$$D_1f(\bar{a}) = 0 = D_2f(\bar{a})$$

ja

$$\mathcal{D} := D_{11}f(\bar{a})D_{22}f(\bar{a}) - D_{12}(\bar{a})^2 > 0, \quad (23)$$

niin \bar{a} on oleellinen ääriarvopiste;

- maksimi, jos $D_{11} < 0$
- minimi, jos $D_{11} > 0$.

Määritelmä 6.2.5 Satulapiste. Olkoon A, \bar{a}, f kuten lauseen 6.4 oletuksessa.

$$D_1f(\bar{a}) = D_2f(\bar{a}) = 0.$$

Jos f saa \bar{a} :n mielivaltaisessa ympäristössä sekä suurempia että pienempiä arvoja kuin $f(\bar{a})$, niin \bar{a} on *satulapiste*.

Esimerkki 6.2.6 Määritellään

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Derivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 &= 2x & D_2 &= -2y \\ D_{11} &= 2 & D_{22} &= -2 \\ D_{12} &= 0 \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) = 0 &\iff 2x = 0 \iff x = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0 &\iff -2y = 0 \iff y = 0. \end{aligned}$$

Pisteessä $\bar{a} = (0, 0)$

$$D_{11}f(\bar{a})D_{22}f(\bar{a}) - D_{12}f(\bar{a})^2 < 0.$$

Esimerkki 6.2.7 Määritellään

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y.$$

Tehtävänä on etsiä ääriarvo- ja satulapisteet.

Ratkaisu. Osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} D_1 f &= 2x + y + 1 \\ D_2 f &= x + 2y - 1. \end{aligned}$$

Jos (x, y) on kriittinen piste (eli derivaattojen nollakohta), niin

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Pisteessä $(-1, 1)$ pätee

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= 2 \\ D_{22} &= 2 \\ D_{12} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{D}(-1, 1) > 0,$$

eli kyseessä on ääriarvopiste (minimi).

Esimerkki 6.2.8 Määritellään

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy.$$

Derivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f &= 3x^2 + 3y \\ D_2 f &= -3y^2 + 3x. \end{aligned}$$

Kriittiset pisteet ovat

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ -3y^2 + 3x = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = x^4 \\ y = -x^2 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \text{ tai } (x, y) = (1, -1). \end{aligned}$$

Edelleen

$$D_{11}f = 6x, \quad D_{22}f = -6y, \quad D_{12}f = 3,$$

joten

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0, 0) &= -9 < 0 \quad (\text{satulapiste eli ei ääriarvopiste}) \\ \mathcal{D}(-1, 1) &= 6 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot (-1) - 9 = 36 - 9 > 0 \quad (\text{minimi.}) \end{aligned}$$

Lauseen 6.2.4 todistuksesta:

Olkoon $\bar{h} \in B(0, r)$, $r > 0$. Lauseen 6.1.2 mukaan pätee

$$\begin{aligned} f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) &= D_1 f(\bar{a})h_1 + D_2 f(\bar{a})h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(D_{11}f(\bar{a})h_1^2 + 2D_{12}f(\bar{a})h_1h_2 \right. \\ &\quad \left. + D_{22}f(\bar{a})h_2^2 \right) + |\bar{h}| \varepsilon(\bar{h}), \end{aligned}$$

missä $\varepsilon(\bar{h}) \rightarrow 0$, kun $\bar{h} \rightarrow 0$. Koska \bar{h} on pieni ja $D_1 f(\bar{a}) = D_2 f(\bar{a}) = 0$, määrää lauseke

$$D_{11}f(\bar{a})h_1^2 + 2D_{12}f(\bar{a})h_1h_2 + D_{22}f(\bar{a})h_2^2 \quad (24)$$

erotuksen $f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})$ etumerkin. Lauseke (24) on neliömuoto $P(h_1, h_2)$, kertoimet $a = D_{11}f(\bar{a})$, $b = D_{12}f(\bar{a})$, $c = D_{22}f(\bar{a})$. Ylläolevista määritelmistä seuraa, että \bar{a} on ääriarvopiste jos ja vain jos neliömuoto P on definiitti. Huomaa, että

$$D > 0 \iff \mathcal{D}(\bar{a}) > 0.$$

Yllä olevat tarkastelut olivat lokaaleja.

Esimerkki 6.2.9 Funktion suurin tai pienin arvo joukossa $B \subset \mathbf{R}^2$. Olkoon B kompakti (eli rajoitettu ja suljettu). Nyt pätee: Jos $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva, niin f saa B :ssä suurimman ja pienimmän arvon. Esimerkiksi jos $C := [0, \infty[$, niin funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ ei saa joukossa C pienintä arvoaan. Mutta C ei olekaan kompakti joukko.

Huomautus 6.2.10 Se, että funktio $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ saa pienimmän arvonsa pisteessä $\bar{x}_0 \in B$, tarkoittaa, että

$$f(\bar{y}) \geq f(\bar{x}_0) \quad \forall y \in B.$$

Olkoon B kompakti, $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva ja kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva. Ainoat pisteet, joissa f voi saada suurimman tai pienimmän arvonsa ovat

1. f :n lokaalit ääriarvopisteet
2. B :n reunapisteet.

Yllä esitettyä lokaalien ääriarvojen tarkastelua voidaan siten käyttää hyväksi myös globaalien ääriarvojen eli suurimman ja pienimmän arvon löytämiseksi. Lopuksi, ilman todistuksia esitetään n :n muuttujan funktioiden ääriarvojen teoriaa.

Lause 6.2.11 Olkoon $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ derivoituva. Jos funktiolla f on ääriarvo pisteessä $\bar{a} \in A$, niin

$$\nabla f(\bar{a}) = 0 \quad \text{eli} \quad D_1 f(\bar{a}) = D_2 f(\bar{a}) = \dots = D_n f(\bar{a}) = 0.$$

Todistus. Sama kuin $n = 2$. \square

Lause 6.2.12 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$, f kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja

$$\nabla f(\bar{a}) = 0 \quad \text{pisteessä } \bar{a} \in A.$$

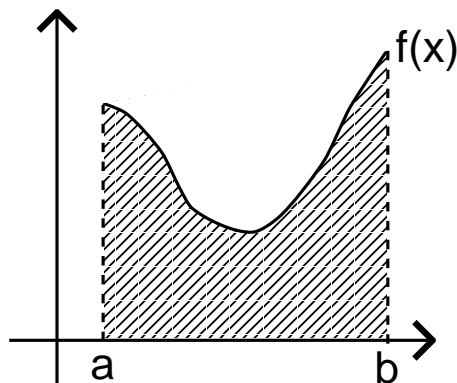
Muodostetaan funktion f Hessen matriisi

$$H = \begin{pmatrix} D_{11}f(\bar{a}) & D_{12}f(\bar{a}) & \dots & D_{1n}f(\bar{a}) \\ D_{21}f(\bar{a}) & D_{22}f(\bar{a}) & \dots & D_{2n}f(\bar{a}) \\ \vdots & & \ddots & \\ D_{n1}f(\bar{a}) & D_{n2}f(\bar{a}) & \dots & D_{nn}f(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

ja diagonalisoidaan se; saadaan muotoa

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

oleva matriisi. Seuraavat tulokset pätevät:



Kuva 20: Pinta-ala

- a) Jos kaikki ominaisarvot ovat suurempia kuin nolla, on \bar{a} minimi.
- b) Jos kaikki ominaisarvot ovat pienempiä kuin nolla, on \bar{a} maksimi
- c) Jos matriisilla on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja, niin \bar{a} ei ole ääriarvopiste.

7 Käyräintegraalit

Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva. Sen integraalifunktiota $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ merkitään

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt,$$

ja sille pätee kaava $\frac{dF}{dx} = f$. Geometrinen tulkinta: Kuvan 20 väritetyn alueen pinta-ala on $\int_a^b f(x) dx$.

Olkoon $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ (tai \mathbf{R}^n) jatkuva. Joukko $\varphi([a, b]) \subset \mathbf{R}^2$ on käyrä, jota merkitään esimerkiksi Γ . Kuvaus φ on Γ :n parametriesitys.

Jos käyrällä on parametriesitys, joka on *injektio*, sitä sanotaan *kaareksi*. Valitsemalla toinen päätepiste *alkupisteeksi* ja toinen *loppupisteeksi*, saadaan *suunnistettu kaari*. Kaari on *säännöllinen*, jos sillä on jatkuvasti derivoituva parametriesitys.

Määritelmä 7.0.13 Olkoon $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ säännöllinen suunnistettu kaari ja olkoon $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ jatkuvasti derivoituva parametriesitys (siis $\Gamma = \varphi([a, b])$). Jos $f : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ ja $g : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ ovat jatkuvia, niin määritellään

$$\int_{\Gamma} f dx + g dy := \int_a^b (f(\varphi(t))\varphi_1'(t) + g(\varphi(t))\varphi_2'(t)) dt.$$

Yleisesti:

$$\Gamma \subset \mathbf{R}^n, \quad \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \gamma([a, b]) = \Gamma, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

jatkuvasti derivoituva. Olkoon $f_j : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Määritellään

$$\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n := \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)) dt$$

Merkitään myös

$$\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n := \int_{\Gamma} \bar{f} \cdot d\bar{r},$$

missä $f := (f_1, \dots, f_n)$ ja $d\bar{r} := (dx_1, \dots, dx_n)$.

Lause 7.0.14 Määritelmän 7.0.13 käyräintegraali ei riipu Γ :n parametriesityksestä.

Todistus. Sivuuutetaan. \square

Esimerkki 7.0.15 Laske

$$\int_{\Gamma} x^2 dx + xy dy,$$

kun Γ on yksikköympyrän kaari pisteestä $(1, 0)$ pisteeseen $(0, 1)$.

Ratkaisu. Käytetään Γ :lle tuttua parametrisointia

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \cos t \\ y = \varphi_2(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= -\sin t, & \varphi_2'(t) &= \cos t \\ dx &= \varphi_1'(t)dt, & dy &= \varphi_2'(t)dt \end{aligned}$$

ja

$$\int_{\Gamma} x^2 dx + xy dy = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t \sin t \cos t) dt = 0.$$

Toinen mahdollisuus on käyttää Γ :lle parametriesitystä

$$\begin{cases} x = -t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1, 0].$$

Tällöin $\varphi : [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ja

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (-t, \sqrt{1-t^2}).$$

Huomaa, että

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{t^2 + (1-t^2)} = 1.$$

Tällä parametriesityksellä

$$\int_{\Gamma} x^2 dx + xy dy = \int_{-1}^0 \left(t^2 \cdot (-1) + (-t)\sqrt{1-t^2} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = \int_{-1}^0 (-t^2 + t^2) dt = 0,$$

sillä $\varphi_1'(t) = -1$ ja

$$\varphi_2'(t) = \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Käyräintegraalin käsite liittyy läheisesti fysiikkaan.

Esimerkki 7.0.16 Tarkastellaan massapistettä, joka liikkuu pitkin \mathbf{R}^3 :n käyrää Γ . Kappaleeseen vaikuttaa voima

$$\bar{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\bar{i} + F_2(x, y, z)\bar{j} + F_3(x, y, z)\bar{k}$$

missä $\bar{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

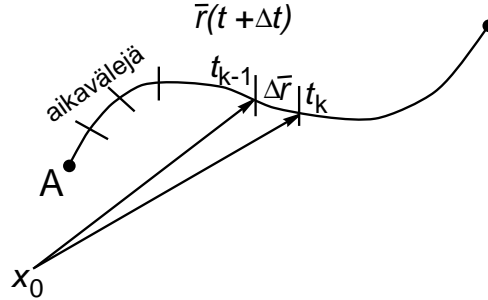
Ratkaisu. Massapisteen sijainti ajan t funktiona (aikaväli on $a \leq t \leq b$) on

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},$$

katso kuva 21.

Kun aika muuttuu (vähän) hetkestä t hetkeen $t + \Delta t$, massapisteen paikan muutos on

$$\begin{aligned} \Delta \bar{r} &= \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) = (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)) \\ &\cong (x'(t)\Delta t, y'(t)\Delta t, z'(t)\Delta t) = \Delta t r'(t). \end{aligned}$$



Kuva 21: Massapisteen sijainti

Tällä välillä tehty työ on

$$\Delta W \cong \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \Delta \bar{r} = \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot r'(t) \Delta t.$$

Halutaan laskea työ, joka tehdään, kun massapiste siirtyy pisteestä A pisteeseen B . Jaetaan aikaväli $[a, b]$ osaväleihin $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$. Työksi osavälillä $[t_{k-1}, t_k]$ saadaan

$$\Delta W \cong \bar{F}(\bar{r}(t_{k-1})) \cdot r'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}).$$

Koko työ on

$$\Delta W \cong \sum_{k=1}^n \bar{F}(\bar{r}(t_{k-1})) \cdot r'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

joka suppenee aikajaon tihentyessä kohti integraalia

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt.$$

Tässä

$$\begin{aligned} \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt &= \int_a^b (F_1(r(t))r'_1(t) + F_2(r(t))r'_2(t) + F_3(r(t))r'_3(t)) dt \\ &= \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz, \end{aligned}$$

eli tehty työ on edellämainitun käyräintegraalin arvo.

Käyräintegraalit voidaan määrittellä helposti myös yleisemmille integroimis-teille. Olkoot Γ_i ja Γ_k suunnistettuja säännöllisiä kaaria siten, että Γ_i :n loppupiste on Γ_{i+1} :n alkupiste. Silloin Γ_i :t muodostavat paloittain säännöllisen tien Γ . ($\Gamma = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$.) Määritellään

$$\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n := \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n.$$

Esimerkki 7.0.17 Tutkitaan integraalia

$$\int_{\Gamma} y dx - x dy + dz.$$

a) Γ on jana jonka alkupiste on $(1, 0, 0)$ ja loppupiste $(0, 1, 1)$. Γ :n parametrisointi:

$$\varphi(t) = (1-t)(1, 0, 0) + t(0, 1, 1) = (1-t, t, t) =: (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad t \in [0, 1].$$

Nyt

$$\varphi_1'(t) = -1, \quad \varphi_2'(t) = 1 = \varphi_3'(t)$$

joten

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y dx - x dy + dz &= \int_0^1 (\varphi_2(t)\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t) + \varphi_3'(t)) dt \\ &= \int_0^1 (t \cdot (-1) - (1-t) \cdot 1 + 1) dt \\ &= \int_0^1 -t - 1 + t + 1 dt = 0. \end{aligned}$$

b) Γ on ruuviviiva

$$\Gamma = \left\{ \left(\cos t, \sin t, \frac{2}{\pi}t \right) \mid t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

Nyt

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \cos t, & \varphi_2(t) &= \sin t, & \varphi_3(t) &= \frac{2}{\pi}t \\ \varphi_1'(t) &= -\sin t, & \varphi_2'(t) &= \cos t, & \varphi_3'(t) &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y dx - x dy + dz &= \int_0^{\pi/2} (\varphi_2(t)\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t) + \varphi_3'(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t + \frac{2}{\pi} \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-1 + \frac{2}{\pi} \right) dt = -\frac{2}{\pi} + 1 \neq 0. \end{aligned}$$

7.1 Vektorikentän potentiaali

Joukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on alue, jos se on avoin ja yhtenäinen. (Joukko on yhtenäinen, jos sitä ei voi esittää kahden epätyhjän avoimen, erillisen joukon yhdisteenä).

Määritelmä 7.1.1 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ alue ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ vektorikenttä. Jos on olemassa differentioituva funktio $u : A \rightarrow \mathbf{R}$ (skalaariarvoinen!) siten, että $\nabla u = f$ (eli $f_1 = D_1 u$, $f_2 = D_2 u$) niin u on funktion f potentiaali. Sanotaan myös, että lauseke

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

on *eksakti* ja u on sen *integraalifunktio*.

Huomautus 7.1.2 Kaikilla vektorikentillä ei ole olemassa potentiaalia.

Huomautus 7.1.3 Potentiaali on yksikäsitteinen lisättävää vakiota vaille: Jos u on funktion f potentiaali, niin $v : A \rightarrow \mathbf{R}$ on funktion f potentiaali jos ja vain jos on olemassa vakio $c \in \mathbf{R}$ siten, että $v = u + c$.

Esimerkki 7.1.4 Olkoon

$$f(x, y) = (3x^2y + \cos(x + y), x^3 + \cos(x + y)), \quad f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2.$$

Tällöin

$$u(x, y) = x^3y + \sin(x + y),$$

ja pätee $\nabla u = f$.

Esimerkki 7.1.5 Olkoon

$$f(x, y) = (10x^2, \cos x + e^y).$$

Tällä ei ole potentiaalifunktiota. Tähän tapaukseen palaamme myöhemmin.

Edellä oleva Määritelmä 7.1.1 toimii myös avaruudessa \mathbf{R}^n : Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$, missä $A \subset \mathbf{R}^n$ on alue. Tällöin $u : A \rightarrow \mathbf{R}$ on funktion f potentiaali, jos $\nabla u = f$.

Esimerkki 7.1.6 Olkoon

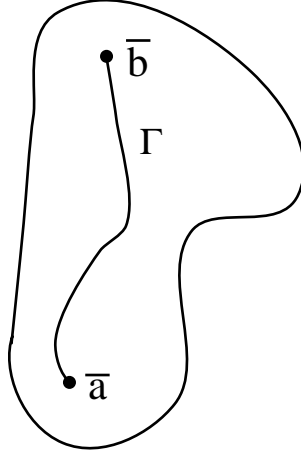
$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad f : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3,$$

missä

$$\begin{aligned} \bar{r} &= (x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \\ r &= |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Voidaan kirjoittaa $f(x, y, z) = \frac{\bar{r}}{r^3}$. Tällä on potentiaali $u(x, y, z) = -\frac{1}{r}$, sillä

$$D_1 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(-(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r^3} = f_1 \text{ jne.}$$



Kuva 22: Kaari Γ

Lause 7.1.7 Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ jatkuva vektorikenttä, $A \subset \circ \mathbf{R}^n$ alue ja $f = (f_1, \dots, f_n)$. Olkoon $u : A \rightarrow \mathbf{R}$ funktion f potentiaali. Jos $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in A$ ja $\Gamma \subset A$ paloittain säännöllinen tie alkupisteenä \bar{a} ja loppupisteenä \bar{b} , niin

$$\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = u(\bar{b}) - u(\bar{a}).$$

Katso kuva 22.

Todistus. Oletetaan aluksi, että Γ on säännöllinen kaari, toisin sanoen, on olemassa jatkuvasti derivoituva parametriesitys

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Ketjusäännöstä seuraa, että

$$(u \circ \varphi)'(t) = \sum_{i=1}^n (D_i u)(\varphi(t)) \varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(t)) \varphi_i'(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}.$$

Käyräintegraalin määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n &= \int_{\alpha}^{\beta} [f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \dots + f_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (u \circ \varphi)'(t) dt = [u \circ \varphi]_{t=\alpha}^{\beta} \\ &= u(\varphi(\beta)) - u(\varphi(\alpha)) = u(\bar{b}) - u(\bar{a}). \end{aligned}$$

□

Jos Γ on säännöllinen tie, jaetaan tarkastelu säännöllisiin osakaariin.

Esimerkki 7.1.8 Laske

$$\int_{\Gamma} \underbrace{yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz}_{(*)},$$

kun Γ on ruuviviiva,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Alkupiste on $(1, 0, 0)$ ja loppupiste $(1, 0, 2\pi)$.

Ratkaisu. Määritellään $u(x, y, z) = xyz$. Tällöin

$$\nabla u(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Siten $(*)$ on eksakti funktio ja Lauseen 7.1.7 nojalla

$$\int_{\Gamma} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz = u(1, 0, 2\pi) - u(1, 0, 0) = 1 \cdot 0 \cdot 2\pi - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Lause 7.1.9 Olkoon $A \subset \circ \mathbf{R}^2$ ympyrä (kiekko), $f : A \rightarrow \mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituva ja $f = (f_1, f_2)$. Tällöin funktiolla f on potentiaali jos ja vain jos

$$D_1 f_2 = D_2 f_1 \quad (\text{integroituvuus ehto}).$$

Huomautus 7.1.10 Lause 7.1.9 ei päde kaikilla alueille A ; se voidaan kyllä yleistää niin sanotuille yhdesti yhtenäisille alueille. Katso kuva 23.

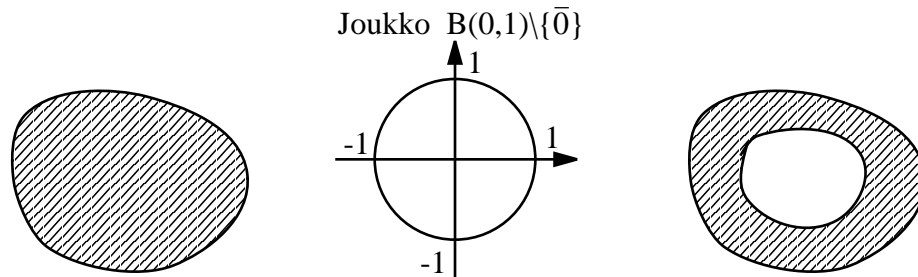
Lauseen 7.1.9 todistus. Väite: Funktiolla f on potentiaali jos ja vain jos $D_2 f_1 = D_1 f_2$.

Todistus. 1. Oletetaan, että funktiolla f on potentiaali u , eli

$$\begin{cases} D_1 u = f_1 \\ D_2 u = f_2 \end{cases}.$$

Derivointijärjestys on vaihdannainen, joten

$$\begin{aligned} D_1(D_2 u) &= D_2(D_1 u) \\ \Rightarrow D_1 f_2 &= D_2 f_1. \end{aligned}$$



Yhdesti yhtenäinen

Yhtenäisiä, mutta eivät yhdesti yhtenäisiä

Kuva 23: Yhdesti yhtenäisyys

2. Oletetaan, että $D_2 f_1 = D_1 f_2$. Merkitään pisteellä (a, b) alueen A keskipistettä. Olkoon nyt $(x, y) \in A$ mielivaltainen piste. Määritellään

$$u(x, y) := \int_b^y f_2(a_1, x_2) dx_2 + \int_a^x f_1(x_1, y) dx_1 \left(= \int_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \right).$$

Lasketaan

$$D_1 u(x, y) = \underbrace{D_1 \int_b^y f_2(a, x_2) dx_2}_{=0} + D_1 \int_a^x f_1(x_1, y) dx_1 = f_1(x, y),$$

ja

$$\begin{aligned} D_2 u(x, y) &= D_2 \int_b^y f_2(a, x_2) dx_2 + D_2 \int_a^x f_1(x_1, y) dx_1 \\ &= f_2(a, y) + \int_a^x D_2 f_1(x_1, y) dx_1 \\ &= f_2(a, y) + \int_a^x D_1 f_2(x_1, y) dx_1 \\ &= f_2(a, y) + [f_2(x_1, y)]_{x_1=a}^x \\ &= f_2(a, y) + f_2(x, y) - f_2(a, y) \\ &= f_2(x, y). \end{aligned}$$

Perustelu sille, että tässä voidaan derivoida integraalimerkin alla, sivuutetaan. \square

Esimerkki 7.1.11 Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy,$$

kun

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \mid x = \cos t, y = \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Ratkaisu. Tien alkupiste on $(1, 0)$ ja loppupiste $(0, 1)$. Merkitään

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} \\ f_2(x, y) &= \frac{e^y}{1+x^2} \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} D_2 f_1(x, y) &= D_2 \left[\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} \right] = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} e^y \\ D_1 f_2(x, y) &= D_1 \frac{e^y}{1+x^2} = -\frac{e^y \cdot 2x}{(1+x^2)^2}, \end{aligned}$$

eli $D_2 f_1 = D_1 f_2$. (Yhtälö $D_2 f_1 = D_1 f_2$ pätee koko tasossa \mathbf{R}^2 , esimerkiksi joukossa $B(0, 10^6)$.) Siten vektorikentällä $f := (f_1, f_2)$ on potentiaali u ja Lauseen 7.1.7 mukaan

$$u(0, 1) - u(1, 0) = \int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy.$$

Tämä voidaan tulkita myös niin, että integraalin arvo ei riipu integroimistiestä. Valitsemme uuden integroimistien $\tilde{\Gamma}$ siten, että kuljetaan pisteestä $(0, 1)$ pisteeseen $(1, 0)$ koordinaattiakselien suuntaisia janoja pitkin origon kautta. Lasketaan

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f_1 dx + f_2 dy = \int_{\Gamma_1} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\Gamma_2} f_1 dx + f_2 dy$$

Tässä $\Gamma_1 : \varphi(t) = (1-t, 0)$, $t \in [0, 1]$ ja $\varphi'_1 = -1, \varphi'_2 = 0$, joten

$$\int_{\Gamma_1} f_2 dy = 0 \quad \text{ja} \quad f_1(x, 0) = \frac{2x(1-e^0)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Siten

$$\int_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 :n parametriesitys: $\varphi(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$ ja $\varphi'_1 = 0, \varphi'_2 = 1$.

$$\int_{\Gamma_2} \dots = \int_0^1 \frac{e^t}{1+0} \varphi'_2(t) dt = \int_0^1 e^t dt = e - 1.$$

Vastaus on siis -1 .

Esimerkki 7.1.12 Lause 7.1.9 ei päde kaikille alueille A !

Olkoon

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad f : A \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad A = \mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\}.$$

Edelleen

$$\begin{aligned} D_2 f_1 &= \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ D_1 f_2 &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

siten $D_2 f_1 = D_1 f_2$ joukossa A . Tarkastellaan integraalia

$$\int f_1 dx + f_2 dy,$$

kun

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x = \cos t, y = \sin t; t \in [0, 2\pi]\}$$

(eli Γ on yksikköympyrän reuna).

Jos funktiolla f on potentiaali u koko tasossa \mathbf{R}^2 , niin Lauseen 7.1.7 nojalla

$$\int f_1 dx + f_2 dy = u(\bar{b}) - u(\bar{a}) = 0,$$

koska Γ :n loppupiste \bar{b} ja Γ :n alkupiste \bar{a} ovat sama $(1, 0)$.

Lasketaan käyräintegraali suoraan:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad \varphi'_1 = -\sin t, \varphi'_2 = \cos t.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{1} (-\sin t) + \frac{\cos t}{1} \cdot \cos t \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Lause 7.1.9 ei näin ollen voi päteä.

Huomautus 7.1.13 Jos Γ on suljettu (umpinainen) integroimistie (alku- ja loppupiste samat), niin

$$\int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy$$

(f kuten edellä) on ” 2π kertaa Γ :n kierrosluku nollan suhteen”.

Lause 7.1.14 Olkoon A ympyrä, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva. Funktiolla f on potentiaali $u : A \rightarrow \mathbf{R}$, jos ja vain jos

$$\int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy = 0, \quad (\text{pyörteettömyys})$$

kun Γ on mielivaltainen umpinainen paloittain säännöllinen tie.

Potentiaalin laskeminen

Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}^2$ vektorikenttä, jolla on potentiaali $u : A \rightarrow \mathbf{R}$. Lauseesta 7.1.7 seuraa

$$u(x, y) = -u(a, b) + \int_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2,$$

missä $(a, b) \in A$ on kiinteä ja $\Gamma \subset A$ on paloittain säännöllinen tie, alkupisteenä (a, b) ja loppupisteenä (x, y) .

Jos esimerkiksi valitaan Γ :ksi murtoviiva $(a, b) \rightarrow (a, y) \rightarrow (x, y)$ sekä $u(a, b) = 0$, saadaan u :n arvo pisteessä (x, y) kaavasta

$$u(x, y) = \int_b^y f_2(a, x_2) dx_2 + \int_a^x f_1(x_1, y) dx_1.$$

Vaihtoehtoisesti, jos Γ on murtoviiva $(a, b) \rightarrow (x, b) \rightarrow (x, y)$, saadaan

$$u(x, y) = \int_a^x f_1(x_1, b) dx_1 + \int_b^y f_2(x, x_2) dx_2.$$

Katso kuva 24.

Esimerkki 7.1.15 Laske vektorikentän

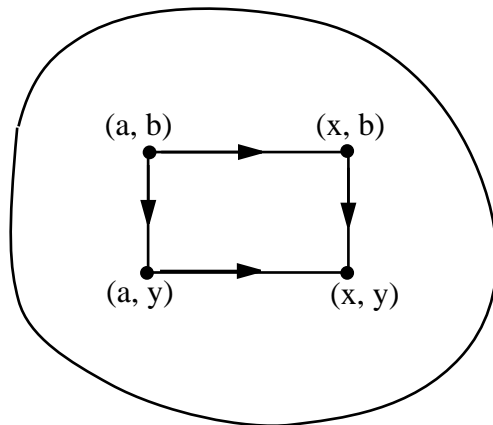
$$f := (5x^4y^4, 4x^5y^3 + 1)$$

potentiaali.

Ratkaisu. 1) Tarkastellaan, onko potentiaalia: Pätee

$$D_1f_2(x, y) = 20x^4y^3 = D_2f_1(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

joten potentiaali u on olemassa koko tasossa.



Kuva 24: Murtoviiva

2) Valitaan $u(0, 0) = 0$ ja $\Gamma : (0, 0) \rightarrow (x, 0) \rightarrow (x, y)$. Saadaan

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_0^x f_1(x_1, 0) dx_1 + \int_0^y f_2(x, x_2) dx_2 \\
 &= \int_0^x 5x_1^4 \cdot 0 dx_1 + \int_0^y (4x^5 x_2^3 + 1) dx_2 \\
 &= 0 + [x^5 x_2^4 + x_2]_{x_2=0}^y = x^5 y^4 + y.
 \end{aligned}$$

Tarkistus:

$$\nabla u(x, y) = (5x^4 y^4, 4x^5 y^3 + 1).$$

Potentiaalin laskeminen avaruudessa \mathbf{R}^n

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ avoin yhtenäinen, $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ vektorikenttä. Funktio $u : A \rightarrow \mathbf{R}$ on potentiaali, jos

$$\nabla u = f \quad \text{eli} \quad D_j u = f_j, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Lauseen 7.1.9 integroituvuusehto avaruudessa \mathbf{R}^n :

$$D_i f_j = D_j f_i, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Esimerkki 7.1.16 Olkoon

$$f(x, y, z) = (y - \sin(x + z), x, -\sin(x + z)).$$

Integroituvuus ehdot

$$\begin{aligned} D_1 f_2 &= 1 = D_2 f_1 \\ D_1 f_3 &= -\cos(x+z) = D_3 f_1 \\ D_2 f_3 &= 0 = D_3 f_2 \end{aligned}$$

toteutuvat, joten

$$u(x, y, z) = xy + \cos(x+z).$$

Tapauksessa $n = 3$ merkitään

$$\begin{aligned} \nabla \times f &:= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} D_2 & D_3 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} + \bar{j} \begin{vmatrix} D_1 & D_3 \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \\ &= (D_2 f_3 - D_3 f_2) \bar{i} + (D_1 f_3 - D_3 f_1) \bar{j} + (D_1 f_2 - D_2 f_1) \bar{k}. \end{aligned}$$

Integroituvuusehto pätee jos ja vain jos $\nabla \times f = \bar{0}$ alueessa A .

Sanomme, että vektorikenttä f on pyörteetön, jos

$$\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = 0$$

jokaiselle umpinaiselle Γ .

7.2 Integrointi kaaren pituuden suhteen

Olkoon $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ säännöllinen kaari, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ kaaren Γ jatkuvasti derivoituva parametriesitys. Kaaren Γ pituus on

$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

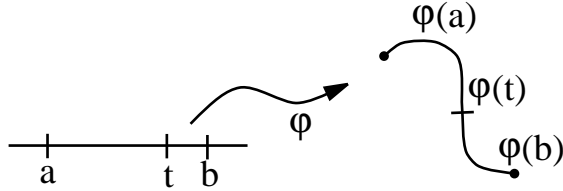
Katso kuva 25.

Väliä $[a, t]$ vastaava kaaren pituus

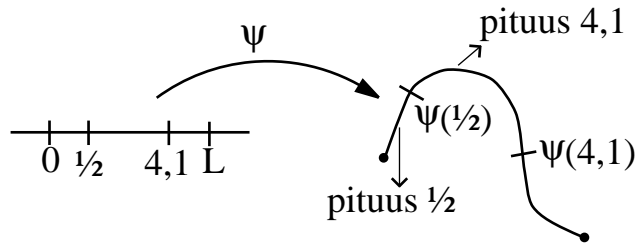
$$s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \varphi_2'(\tau)^2} d\tau.$$

Funktio on $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, L]$ jatkuvasti derivoituva bijektio, koska

$$\lambda'(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} > 0.$$



Kuva 25: Kaaren pituus



Kuva 26: Parametrisaatio polulle Γ

$\lambda(t)$ on kaaren pituus pisteestä $\varphi(a)$ pisteeseen $\varphi(t)$ ja λ on aidosti kasvava. Määritellään $\psi := (\psi_1, \psi_2) : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\psi(s) = \varphi \circ \lambda^{-1}(s)$. Funktion ψ on mittatarkka parametrisaatio polulle Γ , katso kuva 26.

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \varphi_1(\lambda^{-1}(s)) = \psi_1(s) \\ y = \varphi_2(t) = \varphi_2(\lambda^{-1}(s)) = \psi_2(s) \end{cases}, \quad 0 \leq s \leq L.$$

Olkoon $f : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva. Määritellään funktion f integraali kaaren pituuden suhteen

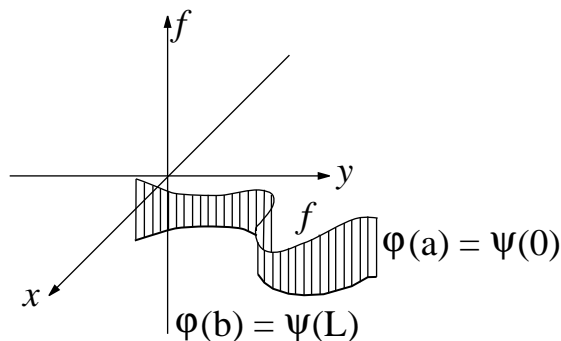
$$\int_{\Gamma} f ds := \int_0^L f(\psi(s)) ds.$$

Laskujen helpottamiseksi suoritetaan muuttujan vaihto:

$$\begin{aligned} s &= \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \varphi_2'(\tau)^2} d\tau, \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^t \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \varphi_2'(\tau)^2} d\tau := \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}. \end{aligned}$$

Saadaan

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_0^L f(\psi(s)) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$



Kuva 27:

Integraalin geometrinen tulkinta: se on funktion f kuvaajan ja $x - y$ -tasossa olevan käyrän Γ väliin jäävän liuskan pinta-ala. Katso kuva 27.

Avaruudessa \mathbf{R}^3 :

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\psi(s)) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2} dt,$$

missä $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, on Γ :n parametriesitys.

Esimerkki 7.2.1 (Katso kuva 28.) Jos kaarella Γ on massa, jonka tiheys $\rho(x, y)$, niin painopisteen koordinaatit ovat:

$$X = \frac{\int_{\Gamma} x \rho(x, y) ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y) ds},$$

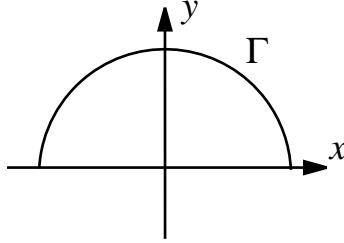
$$Y = \frac{\int_{\Gamma} y \rho(x, y) ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y) ds}.$$

Esimerkki 7.2.2 Oletetaan, että ρ on vakio=: ρ ja Γ on puoliympyrä

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}.$$

Reunalla Γ on parametriesitys

$$\begin{cases} x = \cos t =: \varphi_1(t) \\ y = \sin t =: \varphi_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$



Kuva 28:

Lasketaan

$$\int_{\Gamma} \rho(x, y) ds = \int_0^{\pi} \rho_0 \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \rho_0 \pi$$

ja

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x \rho(x, y) ds &= \int_0^{\pi} \rho_0 \varphi_1(t) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt = \int_0^{\pi} \rho_0 \cos t dt = 0 \\ \int_{\Gamma} y \rho(x, y) ds &= \int_0^{\pi} \rho_0 \sin t dt = 2\rho_0 \end{aligned}$$

eli

$$X = \frac{0}{\pi \rho_0} = 0, \quad Y = \frac{2\rho_0}{\pi \rho_0} = \frac{2}{\pi}.$$

8 Pintaintegraalit

Olkoon $R \subset \mathbf{R}^2$ suljettu suorakulmio

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

ja $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja \mathcal{D}_n joukko tason suljettuja neliöitä:

$$\mathcal{D}_n = \left\{ [k \cdot 2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \times [l2^{-n}, (l+1)2^{-n}] \mid k, l \in \mathbf{Z} \right\}.$$

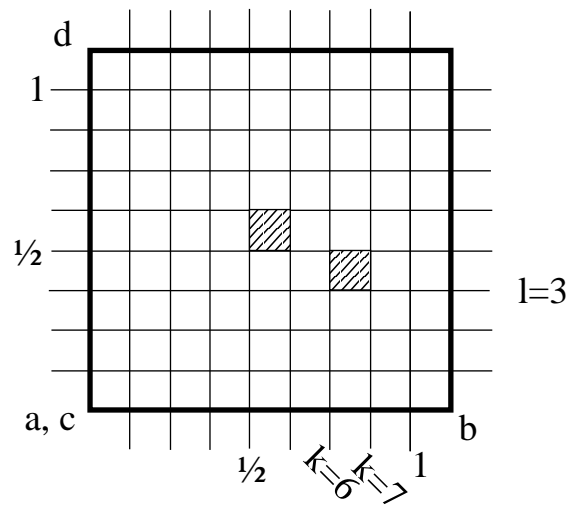
Merkitään

$$Q_{n,k,l} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \times [l2^{-n}, (l+1)2^{-n}]$$

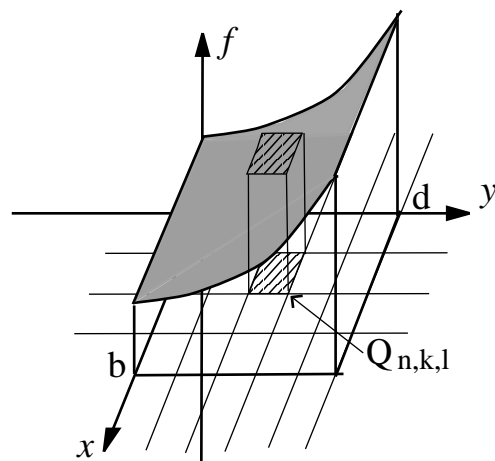
$\cup_{k,l \in \mathbf{Z}} Q_{n,k,l} = \mathbf{R}^2$. Katso kuvat 29 ja 30.

Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jokin funktio. Haluamme määritellä sen integraalin yli joukon \mathbf{R} . Merkitään

$$G_{n,k,l} = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{n,k,l}\}$$



Kuva 29: Hila



Kuva 30: Pinta

ja

$$g_{n,k,l} = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{n,k,l}\}$$

(määrittely: jos $Q_{n,k,l} \not\subset R \Rightarrow G_{n,k,l}g_{n,k,l} = 0$). Määritellään lukua n vastaavat ylä- ja alasummat:

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{k,l} G_{n,k,l} \cdot 2^{-2n} \\ m_n &= \sum_{k,l} g_{n,k,l} \cdot 2^{-2n} \end{aligned}$$

Huom! 2^{-2n} on $Q_{n,k,l}$:n pohjan pinta-ala, joten esimerkiksi luku $G_{n,k,l} \cdot 2^{-2n}$ on kuvassa 30 olevan särmiön tilavuus. Luku $g_{n,k,l} \cdot 2^{-2n}$ on hieman pienemmän särmiön tilavuus; luku M_n on siten (hieman liian suuri) approksiimaatio funktion f määräämän pinnan ja $x - y$ -tason suorakulmion \mathbf{R} väliin jäävän kappaleen tilavuudelle.

Määritelmä 8.0.3 Jos $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ ovat olemassa ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n,$$

niin sanotaan, että f on integroitava joukossa R ja kyseinen raja-arvo on funktion f *pintaintegraali* yli suorakulmion R , merkitään

$$\int_R f, \quad \iint_R f(x, y) \, dx dy, \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx dy.$$

Huomautus 8.0.4 Voidaan osoittaa, että jos $f : R \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva, se on aina integroitava.

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Määritellään funktio f koko joukossa \mathbf{R} kaavalla

$$f(x, y) := 0, \quad \text{kun } (x, y) \notin A.$$

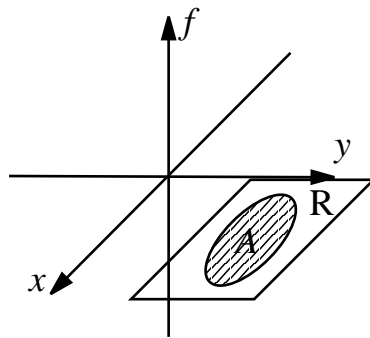
Merkitään f_A :lla funktion f jatketta. Valitaan suorakulmio R (reunat kokonaislukujen kohdalla kuten edellä) siten, että $A \subset R$. Määritellään

$$\int_A f := \int_R f_A,$$

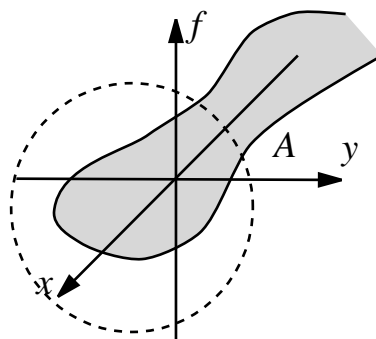
määritelmä ei riipu suorakulmion R valinnasta. Katso kuva 31.

Jos A ei ole rajoitettu, voidaan määritellä

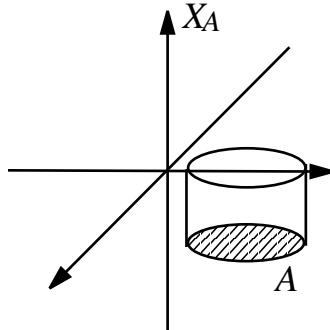
$$\int_A f = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A \cap B(0, m)} f,$$



Kuva 31:



Kuva 32:



Kuva 33:

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa. Katso kuva 32.

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu. Määritellään joukon A *karakteristinen funktio* kaavalla

$$\mathcal{X}_A(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Määritelmä 8.0.5 A on *mitallinen*, jos \mathcal{X}_A on integroituva A :ssa. Katso kuva 33.

Huomautus 8.0.6 Itse asiassa

$$\int_A \mathcal{X}_A = A\text{:n "pinta-ala"}.$$

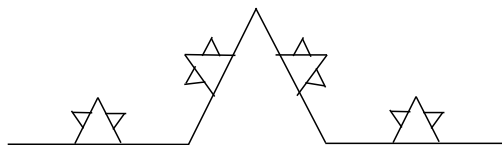
$\int_A \mathcal{X}_A = A\text{:n pintamitta} =: m(A)$. Jos $m(A) = 0$, niin sanotaan, että A on nollamittainen.

Lause 8.0.7 Jos joukon A reuna on nollamittainen, niin A on mitallinen.

Lause 8.0.8 Jos kaari on säännöllinen tai muotoa

$$\{(x, y) \mid x \in [a, b], y = \psi(x)\},$$

missä $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva, niin se on nollamittainen.



Kuva 34: Kochin lumihiihtalekäyrä

Huomautus 8.0.9 Nollamittaisten joukkojen äärellinen yhdiste on nollamittainen. Kochin lumihiihtalekäyrä (katso kuva 34) on esimerkki monimutkaisesta tason osajoukosta, ns. fraktaalista. Fraktaalireunaiset joukot eivät yleensä ole mitallisia edellä esitettyssä mielessä, eikä niiden yli voida integroida tällä tekniikalla.

Lause 8.0.10 Jos funktiot f_1, \dots, f_m ovat integroituvia A :ssa ja $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$, niin funktio

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$$

on integroituva A :ssa, ja

$$\int_A \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = \lambda_1 \int_A f_1 + \dots + \lambda_m \int_A f_m.$$

Lause 8.0.11 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $m(\delta(A)) = 0$. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ sellainen funktio, että f on jatkuva lukuunottamatta mahdollisesti jotain A :n nollamittaista osajoukkoa B . Silloin f on integroituva A :ssa.

Esimerkki 8.0.12 Olkoon $A = B((3, 4), 100)$ ja

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x + y), & \text{kun } y \geq 0 \\ -1, & \text{kun } y < 0. \end{cases}$$

Tämä ei ole jatkuva x -akselilla ($=L$), mutta $L \cap A$ on nollamittainen(jana).

Lause 8.0.13 Olkoon A joukko, joka on jaettu osiin A_i , $i = 1, \dots, n$, missä $m(\delta(A_i)) = 0$. Funktio f on integroituva joukossa A jos ja vain jos f on integroituva jokaisessa joukossa A_i . Tällöin

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \dots + \int_{A_n} f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f.$$

Lause 8.0.14 Oletetaan että f on integroituva joukossa

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

ja jokaisella kiinteällä $x \in [a, b]$, funktio $y \mapsto f(x, y)$ on integroituva (y :n suhteen) välillä $[c, d]$. Silloin funktio

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

on integroituva välillä $[a, b]$, ja pätee

$$\int_R f = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Merkitään

$$\iint_{a c}^{b d} f(x, y) dx dy \quad \left(\text{tai joskus myös} \quad \iint_{a c}^{b d} f(x, y) dy dx \right).$$

Esimerkki 8.0.15 Laske

$$\int_R (1 - 6x^2y),$$

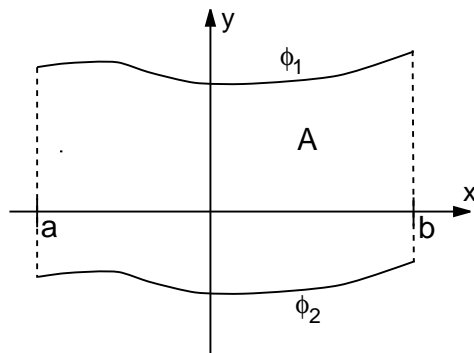
kun $R = [0, 2] \times [-1, 1] = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.

Ratkaisu.

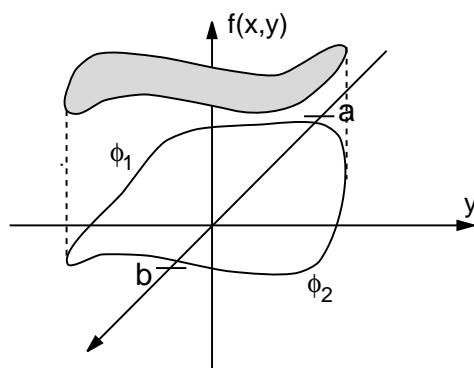
$$\begin{aligned} \int_R &= \iint_{0-1}^{21} (1 - 6x^2y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left([y - 3x^2y^2]_{y=-1}^1 \right) dx = \int_0^2 (1 - 3x^2 \cdot 1) - (-1 - 3x^2(-1)^2) dx \\ &= \int_0^2 2 dx = 4. \end{aligned}$$

Lause 8.0.16 Olkoot $\phi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $\phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuvia funktioita, joille $\phi_1(x) < \phi_2(x)$, $\forall x \in]a, b[$ sekä $\phi_1(a) \leq \phi_2(a)$, $\phi_1(b) \leq \phi_2(b)$. Oletetaan, että $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ on integroituva, missä

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$



Kuva 35:



Kuva 36:

Oletetaan, että integraali

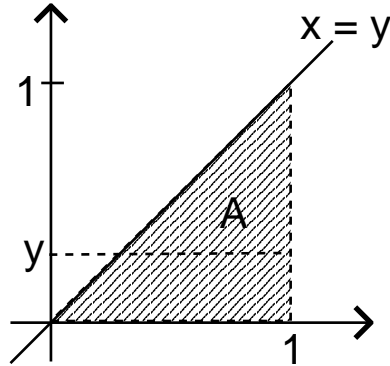
$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

on olemassa kaikille $x \in [a, b]$. Silloin

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Katso kuvat 35 ja 36.

Esimerkki 8.0.17 Olkoon $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = x$ ja $f(x, y) = 3 - x - y$. Nyt



Kuva 37: 2.ratkaisu

$x \in [0, 1]$, joten

$$\begin{aligned} \int_A &= \int_0^1 \left(\int_0^x 3 - x - y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_0^1 \left(3x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3}{2}x^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right]_{x=0}^1 = 1. \end{aligned}$$

Katso kuva 37.

Erityisesti siinä tapauksessa, että f on jatkuva, edellä mainitut integraalit ovat olemassa ja kaava pätee.

Vastaavasti: Jos integroimisalue A on muotoa

$$A = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

ja f on jatkuva A :ssa, niin

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

(Tässä $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ kaikilla $y \in [c, d]$ jne.)

Edellinen esimerkki voidaan siis laskea myös seuraavasti:

$f(x, y) = 3 - x - y$, $y \in [0, 1]$ ja $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$. Nyt $y \leq x \leq 1$ eli $\psi_1(y) = y$ ja $\psi_2(y) = 1$. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{1}{2}x^2 - xy \right]_{x=y}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - \left(3y - \frac{1}{2}y^2 - y^2 \right) \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}y^2 - 4y + \frac{5}{2} \right) dy = \dots = 1. \end{aligned}$$

Esimerkki 8.0.18 Integroimisjärjestyksen vaihtaminen (katso kuva 38). Tarkastellaan integraalia

$$I = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy \right) dx, \quad (25)$$

Tässä $x \in [0, 2]$, $x^2 := \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) := 2x$; huomaa, että kun $x \leq 2$, niin $x^2 = x \cdot x \leq 2x$. Tehtävänä on lausua integraali 25 muodossa

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} (4x + 2) dx \right) dy,$$

missä $y \in [0, 4]$, siis $c = 0$, $d = 4$. Mutta mitä ovat funktiot ψ_1, ψ_2 ?

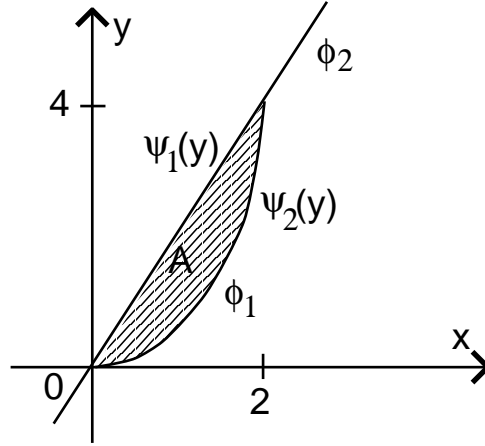
Reunakäyrällä ϕ_1 pätee eli $y = \phi_1(x) = x^2$ jos $\sqrt{y} = x$; siten $\psi_2(y) = \sqrt{y}$ (katso kuva 38). Reunakäyrällä ϕ_2 on $y = \phi_2(x) = 2x$ eli $x = \frac{y}{2}$; siten $\psi_1(y) = \frac{y}{2}$. Siis,

$$I = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx \right) dy.$$

8.1 Muuttujien vaihto pintaintegraaleissa

Lause 8.1.1 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu, ja $\delta(A)$ nollamittainen ja $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva. Oletetaan, että on olemassa jatkuvasti derivoituva bijektio $g : R \rightarrow A$, missä $R \subset \mathbf{R}^2$ on suorakulmio. Tällöin

$$\int_A f = \int_R (f \circ g) \cdot |\mathcal{J}_g|,$$



Kuva 38: Integrointijärjestys

missä \mathcal{J}_g on funktion g funktionaalideterminantti eli *jakobiaani*,

$$\mathcal{J}_g = \begin{vmatrix} D_1g_1 & D_2g_1 \\ D_2g_2 & D_1g_2 \end{vmatrix} = (D_1g_1)(D_2g_2) - (D_2g_1)(D_1g_2),$$

missä $g = (g_1, g_2)$. Katso kuva 39.

Esimerkki 8.1.2 Olkoon

$$A := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Huomaa, että yllä $x \in [-a, a]$ ja

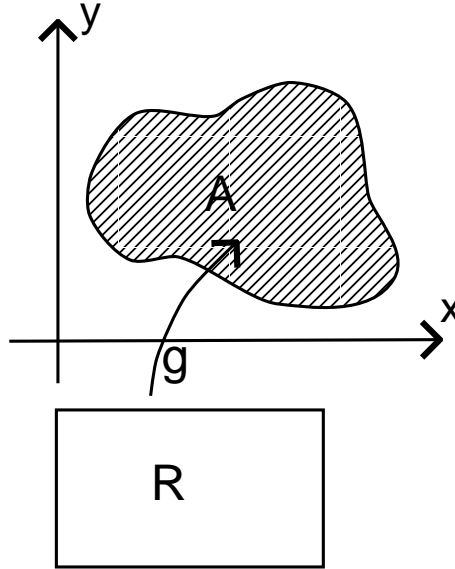
$$\phi_1(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} = \phi_2(x).$$

Tämä saattaa johtaa vaikeaan x -integraaliin. Tarkastellaan sen vuoksi funktiota $g : R \rightarrow A$,

$$g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

missä $r \in [0, a]$ ja $\varphi \in [0, 2\pi]$ eli $(r, \varphi) \in \mathbf{R} := [0, a] \times [0, 2\pi]$. Tämä g on surjektio.

Huomautus 8.1.3 Jos 1. $g : R \rightarrow A$ on injektio ja $m(A \setminus g(R)) = 0$ tai 2. $g : R \rightarrow A$ on surjektio, ja ne pisteet, joilla on enemmän kuin yksi alkukuva muodostavat nollajoukon, niin Lause ?? pätee edelleen.



Kuva 39: Pintaintegraali

Nyt

$$\mathcal{J}_g = D_1 g_1 D_2 g_2 - D_2 g_1 D_1 g_2 = \cos \varphi r \cos \varphi - r(-\sin \varphi) \sin \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Siis,

$$\int_A f = \iint_{00}^{a\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi.$$

Huomautus 8.1.4 Lause 8.1.1 pätee yleisimmillekin joukoille R kuin suorakulmioille.

8.2 Käyrä- ja pintaintegraalien yhteys

Lause 8.2.1 (Eräs Greenin kaavoista) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ on rajoitettu ja $\delta(A)$ Jordanin-käyrä joka koostuu äärellisestä määrästä säännöllisiä kaaria. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}^2$ on jatkuvasti derivoituva. Silloin

$$\int_A (D_1 f_2 - D_2 f_1) = \int_{\delta A} f_1 dx + f_2 dy.$$

Oletetaan myös, että $\delta(A)$:lla on jatkuvasti derivoituva parametriesitys $\varphi : \Delta \rightarrow \delta A$ siten, että $\varphi'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in \Delta$. Tällöin

$$\int_A (D_1 f_1 + D_2 f_2) = \int_{\delta A} (f \cdot \bar{n}) ds, \quad (26)$$

missä \bar{n} on reunakäyrän ulkonormaali: $|\bar{n}| = 1$, $|\bar{n}| \perp \delta(A)$:n tangentti.

8.3 Integrointi yli pinnan

Olemme käsitelleet edellä, kuinka integroidaan yli tasoalueiden. Tällaista integraalia sanotaan pintaintegraaliksi, ja se palautuu kaksinkertaiseen yhden muuttujan funktion integrointiin.

Seuraavaksi otetaan hiukan yleisempi tapaus: integroidaan yli pinnan, joka ei enää olekaan xy -tason alue, vaan pinta

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = h(x, y), (x, y) \in A\},$$

missä A on joku sopiva xy -tason osajoukko. Joukko E on siis \mathbf{R}^3 :n osajoukko, pinta, joka on kahden muuttujan funktion h kuvaaja (esimerkiksi A :n yläpuolella). (Piirrä kuva, kun esimerkiksi A on tason yksikköneliö, ja h on funktio $h(x, y) = 1 + x^2$).

Oletamme, että kolmen muuttujan funktio f on määritelty joukossa E . Silloin sen integraalia yli pinnan E merkitään

$$\int_E f \quad (27)$$

ja se määritellään kaavalla

$$\int_E f := \int_A f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + D_1 h(x, y)^2 + D_2 h(x, y)^2} dx dy. \quad (28)$$

Huomautus 8.3.1 Siinä tapauksessa, että f on vakiofunktio 1, tämä integraali antaa pinnan E pinta-alan.

Esimerkki 8.3.2 Tarkastellaan funktion $h(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ määräämää pintaa E joukossa \mathbf{R}^3 , kun $(x, y) \in A$, ja A on xy -tason yksikkökierok (siis joukko $\{x^2 + y^2 < 1\}$). Piirrä kuva: Pinta E on avaruuden yksikköpallon kuoren ylempi puolikas.

Laskemme E :n pinta-alan, eli integroimme vakiofunktiota (25) yli pinnan E .
Saamme ensinnäkin (laske!)

$$D_1h(x, y)^2 = \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} \quad (29)$$

ja

$$D_2h(x, y)^2 = \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}. \quad (30)$$

Edelleen kaavassa (28)

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + D_1h(x, y)^2 + D_2h(x, y)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

Siirtymällä napakoordinaatteihin saadaan (28) muotoon

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy &= \int_A \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr = 2\pi. \end{aligned}$$

Stokesin kaavan käsittely joudutaan jättämään ajan puutteen vuoksi pois.
Katso tarvittaessa kirjallisuudesta.

9 Avaruusintegraalit

Siirrymme tarkastelemaan kolmen muuttujan funktioiden integrointia yli avaruuden \mathbf{R}^3 osajoukon A . Ajatus on siis se, että yleistetään aiempi tasoalueiden yli integrointi (ei yllä oleva ”integrointi yli pinnan”, vaan sitä edeltävä tarkastelu) tapaukseen jossa on yksi muuttuja enemmän.

Integraalin käsite ja siihen liittyvät mittateoreettiset käsitteet määritellään analogisesti kahden muuttujan funktion tapauksen kanssa. Jätämme tässä yksityiskohdat väliin.

Avaruusintegraalia merkitään esim.

$$\int_A f \quad \text{tai} \quad \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

Kuten arvata saattaa pintaintegraalien tapauksesta, avaruusintegraalin laskeminen palautuu kolminkertaiseen integrointiin. Olkoon ensiksi A koordinaattiakselien suuntainen suuntaissärmiö

$$A := \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}$$

eli $A = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$, missä a_1 jne. ovat jotain reaalilukuja. Tällöin

$$\int_A f = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (31)$$

Olettaen että f on riittävän siisti, esimerkiksi jatkuva, joukossa A , integroinnit kaavassa (31) voi suorittaa missä järjestyksessä tahansa:

$$\int_A f = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy = \int_{c_1}^{c_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \dots$$

Integraalit yli monimutkaisempien joukkojen lasketaan kuten kahden muuttujan tapuksessakin. Oletetaan, että on annettu kahden muuttujan funktiot φ_1 ja φ_2 , missä $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, kun $a_1 \leq x \leq a_2$ ja $b_1 \leq y \leq b_2$. Olkoon nyt

$$A := \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}.$$

(Hahmottele kuva joukosta A , kun φ_1 ja φ_2 ovat jotain sopivia funktioita.) Tällöin

$$\int_A f = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Tässä x - ja y -integrointien järjestyksen voi vaihtaa.

Vielä yleisemmin, jos

$$A := \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

joillekin sopiville funktioille ψ_1 jne., niin

$$\int_A f = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

9.1 Muuttujan vaihto avaruusintegraalissa

Olkoon $R \subset \mathbf{R}^3$ koordinaattiakselien suuntainen suuntaissärmiö, $A \subset \mathbf{R}^3$ kuten yllä sekä $g : R \rightarrow A$ jatkuvasti derivoituva bijektio. Olkoon f joukossa A määritelty funktio, jota halutaan integroida. Pintaintegraalien tapaan voidaan suorittaa muuttujanvaihto kaavalla

$$\int_A f = \int_R (f \circ g) |\mathcal{J}_g|,$$

missä \mathcal{J}_g on kuvauksen g Jacobin determinantti (3×3 -determinantti, jonka j :n rivin i :s alkio on $D_i g_j$).

Tarkastellaan tapausta, että g välittää siirtymisen pallokoordinaatteihin, eli $g : R \rightarrow A$,

$$g(r, \varphi, \psi) := (r \cos \varphi \cos \psi, r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi)$$

$$R := \{(r, \varphi, \psi) \mid 0 \leq r \leq a, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \psi \leq 2\pi\}$$

ja A on avaruuden 0-keskinen, a -säteinen pallo

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\},$$

Tällöin \mathcal{J}_g on

$$\mathcal{J}_g(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos \varphi.$$

9.2 Pinta- ja avaruusintegraalien välinen yhteys

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko, jonka reuna muodostaa pinnan S . Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ määritelty jatkuvasti derivoituva vektorikenttä sekä \bar{n} pinnan S ulkonormaali(vektori). Divergenssikaava yhdistää avaruus- ja pintaintegraalit seuraavasti:

$$\int_A \nabla \cdot f = \int_S f \cdot \bar{n}.$$

Mikäli vektorikentällä f on potentiaali u , eli $f = \nabla u$, saadaan erikoistapauksena Gaussin kaava

$$\int_A \Delta u = \int_S \partial_{\bar{n}} u.$$