Analyysi III
Demo 2, syksy 2002

1. Tarkastellaan jonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$x_n = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Suppeneeko se? Suppeneeko osajono $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, $y_k := x_{n_k}$, kun

a) $n_k = 2k$, b) $n_k = 3k$, c) $n_k = k^2$, d) $n_k = 2^k$.

2. Kirjoita 10 ensimmäistä alkiota rekursiivisesti määritellystä jonosta (x_n), kun

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2^{-n},\\
&\text{b)}\quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1},\\
&\text{c)}\quad x_1 = -2, \quad x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+1},\\
&\text{d)}\quad x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n}.
\end{aligned}$$

Määrää jonon raja-arvo, mikäli mahdollista.

3. Suppeneeko lukujono, joka on määritelty kaavalla

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}?\\
&\text{b)}\quad x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}?
\end{aligned}$$

(Nämä liittyivät Newtonin menetelmään, vrt. Analyysi I. Tarkemmin sanottuna, miten? Vrt. myös oppikirja s. 625-626.)

4. Laske raja-arvo jonolle $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kun a_n on

$$\text{a)}\quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \text{b)}\quad \frac{\log(n+1)}{n^{1/3}}.$$

5. Esitä kahden kokonaisluvun osamääränä päättymätön desimaaliluku

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad 0 \cdot \overline{234} = 0.234234234\ldots,\\
&\text{b)}\quad 1.24\overline{123} = 1.24123123123\ldots.
\end{aligned}$$