

---

**Analyysi III**Demo 3, syksy 2002

---

1. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ ,    b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ ,    c)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$ .

2. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \log n)^3}$ ,    b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+10)}$ ,    c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ .

3. Millä  $x$ :n arvoilla suppenee sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(x+1)^n} + x^n \right)?$$

4. Oletetaan, että positiiviterminen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

suppenee. Osoita, että myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$$

suppenee.

*Vihje.* Oletuksesta seuraa, että suurilla  $n$  termit  $x_n$  ovat ykköstä pienempiä (miksi?). Miten voit silloin vertailla lukuja  $x_n$  ja  $x_n^2$ ?

5. Oletetaan, että luvut  $x_n$  ja  $y_n$  ovat positiivisia kaikilla  $n \in \mathbf{N}$  ja että sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$$

suppenevat. Osoita, että sarja

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ,    b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$

suppenee.