
Analyysi III

Demo 5, syksy 2002

1. Laske luentojen luvun 2 alun esimerkin tavalla sen alueen A pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = 2^x$ ja suorat $y = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$.
2. Todista (induktiolla) kaava

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Kuten tehtävä 1, mutta A on käyrän $y = x^2$ ja suorien $y = 0$, $x = 0$ ja $x = 1$ rajoittama.
4. Tutki seuraavista sarjoista, suppenevatko ne itseisesti, tavallisessa mielessä vai hajaantuvatko ne. Perustelut!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3+n}{5+n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n}{n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$