Analyysi III
Demo 9, syksy 2002

1-2. Määrää seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5},$$

$$\text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-2)^n, \qquad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (x-5)^n,$$

$$\text{e)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n!(x-4)^n, \qquad \text{f)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n^2},$$

$$\text{g)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(4x-2)^n, \qquad \text{h)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+3)^n}{n2^n}.$$

3. Sarjojen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

suppenemissäteet ovat R ja S. Mitä voidaan sanoa sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + c_n) x^n$$

suppenemissäteestä?

4. Integroi termeittäin sarja

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Mikä on sarjan summa/millä x:n arvoilla?

5. Potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kertoimet toteuttavat

a) jono $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ on vähenevä,

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Tästä voidaan päätellä potenssisarjan suppenemissäde. Miten?