
Analyysi III

Demo 13, syksy 2002

1. Osoita, että jos $m, n \in \mathbf{N}$, niin

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

ja

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n. \end{cases}$$

2. Suppeneeko funktion $f(x) = x^2/4$ välillä $[-\pi, \pi]$ muodostettu Fourier-sarja?

3. Samoin, kun

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x|x|, \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Muodosta Fourierin kosini-sarja funktioille

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 2x + x^2, & 0 < x \leq 2, \\ \text{b) } f(x) &= \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5. Muodosta Fourierin sini-sarja edellisen tehtävän funktioille.

BONUSTEHTÄVÄ. Laadi tietokoneohjelma, jolla voit piirtää Fourier-sarjojen osasummien kuvaajia. Piirrä tällä vähintään neljän, tehtävissä 2 – 5 esiintyvän, funktion Fourier-sarjojen osasummia. Kuvista tulisi ilmetä, kuinka termien määrän lisääntyessä Fourier-kehitelmä approksimoi funktiota yhä paremmin. (Ehdotus: Piirrä esim. 1:n, 5:n ja 20:n ensimmäisen termin summa.)

Tyydyttävästä suorituksesta saa 2 ylimääräistä pistettä (välikoe ym. pisteiden lisäksi).

Tyydyttävässä suorituksessa ohjelma laskee Fourier-kertoimet itse, kun funktio on annettu. Laita lyhyt selostus ohjelman toiminnasta sekä koodi mukaan.

Palautus viimeistään perjantaina 13.12. matematiikan laitoksen kansliaan (tunnus "Analyysi III:n bonustehtävä").