Analyysi III

Jari Taskinen

28. syyskuuta 2002

Luku 1

Sisältö

1 Sarjat

1.1 Lukujonoista

Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbf{N}$ kohti valitaan joku reaaliluku $x_n \in \mathbf{R}$, saadaan (reaaliluku)jono

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

jota merkitään myös $(x_n)_n^\infty = 1$, tai $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. (Täsmällinen määritelmä: lukujono on kuvaus eli funktio joukosta $\mathbf{N}$ joukkoon $\mathbf{R}$.)

Esimerkkejä: $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^\infty = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots)$, $\left(\frac{\cos n}{\sin(n\pi)+3}\right)_{n=1}^\infty$, $\left(n^{100} + \frac{n}{3}\right)_{n=1}^\infty$.

Sanomme, että x_n on jonon n:s alkio tai n:s koordinaatti.

Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Jono

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \text{ eli } (x_n)_{n=1}^k$$

on äärellinen lukujono.

Määritelmä 1.1 Jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee raja-arvoon $a \in \mathbf{R}$, jos seuraava pätee. Jokaista mielivaltaista $r > 0$ kohti voidaan löytää luku $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < r, \text{ kun } n \geq N$$

Tällöin merkitään $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Jos $(x_n)_{n=1}^\infty$ ei suppene (mihinkään reaalilukuun), se hajaantuu. Suppenevan lukujonon raja–arvo on yksikäsitteinen (todistus harjoitustehtävä).

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa

$$\left(\frac{1}{n+4} + 1\right)_{n=1}^\infty = (1 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{7}, 1 + \frac{1}{8}, \ldots).$$

Tämä näyttää suppenevan kohti lukua 1. Kuinka tämä todistetaan käyttäen määritelmää 1.1?

Olkoon $r > 0$ mielivaltainen.
1. Tarkastellaan lauseketta

$$|x_n - a|, \text{ missä } \frac{1}{n+4} + 1 = x_n \text{ ja } a = 1;$$

siis

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n+4} + 1 - 1\right| = \left|\frac{1}{n+4}\right| = \frac{1}{n+4}$$

2. Tarkastellaan milloin

$$|x_n - a| < r \text{ eli } \frac{1}{n+4} < r. \tag{1}$$

Tämä voidaan esim. käsittää epäyhtälönä n:lle, missä n voidaan ratkaista r:n avulla.

$$(1) \iff n + 4 > \frac{1}{r} \iff n > \frac{1}{r} - 4.$$

Otetaan joku $N \in \mathbf{N}$ joka on suurempi kuin $\frac{1}{r} - 4$. Jos nyt $n > N$, niin

$$n > N \geq \frac{1}{r} - 4 \Longrightarrow |x_n - a| < r.$$

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots) = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. Suppeneeko tämä jono?

1. Suppeneeko jono esim. arvoon $a = 1$?

Tarkastellaan lauseketta

$$|x_n - a| = |(-1)^n - 1| = \begin{cases} |-2| = 2, & \text{jos } n \text{ pariton} \\ 0, & \text{jos } n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Oletetaan esimerkiksi $r = \frac{1}{100}$. Päteekö nyt

$$|x_n - a| < \frac{1}{100}, \forall\, n \geq N?$$

Mutta olipa N miten suuri tahansa, aina löytyy parittomia lukuja $n > N$ jolloin $|x_n - a| = 2$. Yllä oleva epäyhtälö ei päde $\forall n \geq \mathbf{N}$, joten jono ei suppene arvoon 1.

2. Suppeneeko jono johonkin muuhun $a \in \mathbf{R}$?

Tutkitaan jälleen lauseketta

$$|x_n - a| = |(-1)^n - a| = \begin{cases} |-1 - a|\,, & n \text{ pariton} \\ |1 - a|\,, & n \text{ parillinen} \end{cases} = \begin{cases} |1 + a|\,, & n \text{ pariton} \\ |1 - a|\,, & n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Jompikumpi näistä on suurempi kuin 1, olipa a mikä tahansa reaaliluku.

Jos taas esim. $r = \frac{1}{10}$, niin joko parittomille tai parillisille n

$$|x_n - a| \geq 1 > \frac{1}{10}$$

eli $|x_n - a| < \frac{1}{10}$ ei päde. Näin ollen jono ei suppene a:han.

Esimerkki. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{2}$$

Olkoon $r > 0$ annettu. Jos valitaan luvuksi N esimerkiksi jokin lukua $1/r+3$ suurempi luonnollinen luku, pätee kaikilla $n > N$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{r}+3} < \frac{1}{\frac{1}{r}} = r. \tag{3}$$

Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono sekä $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ aidosti kasvava jono luonnollisia lukuja. Muodostetaan uusi jono $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ siten, että $y_k := x_{n_k}$ kaikilla k. Tätä jonoa sanotaan alkuperäisen jonon osajonoksi.

Esimerkki. Olkoon $x_n = 1/n$ eli jono

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots. \tag{4}$$

Olkoon $n_k := 2k$, eli

$$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 6, \ldots$$

Silloin $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ on jono

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots.$$

Vastaavasti, jos valitaankin $n_k := k^2$, niin

$$y_k = \frac{1}{k^2} \quad \text{eli jono} \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Indeksiksi voidaan valita periaatteessa mikä kirjain tahansa (tämä on vain taiteellinen makukysymys), joten viimeksimainittua osajonoa voidaan yhtä hyvin merkitä (y_n) tai $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, jolloin

$$y_n = \frac{1}{n^2}.$$

Lause 1.2. 1. Jos jono $(x_n$ suppenee raja–arvoon x, niin myös sen jokainen osajono (y_n) suppenee raja–arvoon x.

2. Suppenevan lukujonon kaikki alkiot kuuluvat johonkin rajoitettuun väliin.

3. Oletetaan, että voidaan löytää reaalinen vakio M siten, että $x_n \leq M$ kaikilla n ja että $\lim x_n = x$. Tällöin myös raja–arvo x toteuttaa $x \leq M$.

Todistus jätetään väliin.

Raja–arvojen käytännön laskeminen perustuu usein seuraavan lauseeseen.

Lause 1.3. Jos $\lim x_n = x$ ja $\lim y_n = y$ sekä k on reaaliluku, niin

a) $\lim(x_n + y_n) = x + y$,

b) $\lim(kx_n) = kx$,

c) $\lim(x_n y_n) = xy$, ja

d) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, mikäli $y \neq 0$.

Todistetaan tästä esimerkiksi kohta a). Muut todistukset, ks. Myrberg, lause 2.3.4. Olkoon $r > 0$ annettu. Silloin voidaan löytää luvut N_1 ja N_2 joille

$$|x_n - x| < r/3, \tag{5}$$

kun $n \geq N_1$, ja

$$|y_n - x| < r/3, \tag{6}$$

kun $n \geq N_2$. Valitaan luvuksi N suurempi luvuista N_1 ja N_2.

Jos nyt $n > N$, molemmat epäyhtälöt (5) ja (6) pätevät, ja voidaan arvioida summajonon ja sen väitetyn raja–arvon erotusta:

$$|(x_n+y_n)-(x+y)| = |(x_n-x)+(y_n-y)| \leq |x_n-x|+|y_n-y| < r/3+r/3 < r.$$

Kohta a) on näin todistettu.

Esimerkki. Laske jonon (x_n) raja–arvo, kun

$$x_n := \frac{n^2 + 5n - 10}{3n^2 + 2n + 1}.$$

Ratkaisu. Pätee

$$\frac{n^2 + 5n - 10}{3n^2 + 2n + 1} = \frac{1 + \frac{5}{n} - \frac{10}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Tässä $0 = \lim 5/n = \lim 10/n^2 = \lim 2/n = \lim 1/n^2$, joten osoittajan raja–arvo on 1 ja nimittäjän 3. Koko lukujonon raja–arvo on siten 1/3.

Lause 1.4. Jos jono (x_n) suppenee ja jono (y_n) hajaantuu, niin summajono $(x_n + y_n)$ hajaantuu.

Todistus. Koska (x_n) suppenee, niin myös jono $(-x_n)$ suppenee. Jos summajono suppenisi, saataisiin Lauseen 1.3. nojalla, että myös jono $(y_n) = (x_n + y_n) + (-x_n)$ suppenee, mikä on ristiriita.

Palautamme seuraavaksi Analyysi I:n kurssilta mieleen monotonisen lukujono käsitteen.

Olkoon (a_n) lukujono. Se on

a) nouseva, jos $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$

b) laskeva, jos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

c) aidosti nouseva, jos $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$

d) aidosti laskeva, jos $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

Jono on monotoninen, jos se on joko nouseva tai laskeva.

Olkoon $N \in \mathbf{N}$. Jono (a_n) on

e) nouseva indeksistä N alkaen, jos $a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \ldots$

f) laskeva indeksistä N alkaen, jos $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \ldots$

Tässä ei siis ole merkitystä sillä, miten ensimmäiset jonon alkiot käyttäytyvät.

Lause 1.5. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nouseva jono indeksistä N alkaen. Jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ s.e.

$$x_n \leq M \ \forall \ n \in \mathbf{N}, \tag{7}$$

niin jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, ja raja-arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin M.

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa $(3, 3.3, 3.14, 3, 141, 3.1415, 3.14159, \ldots)$; jonon alkio x_n on π:n arvo katkaistuna n:nen desimaalin kohdalta. Silloin $x_n \in \mathbf{Q}$. Edellä Lausessa 1.5 voidaan ottaa esim. $M = 4$. Näin ollen on olemassaraja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \pi \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}.$$

Käsitellään vielä Cauchyn yleistä suppenemiskriteeriota. Tämä liittyy reaalilukujen joukon täydellisyysominaisuuteen ja –aksiomaan, ks. Analyysi I kurssin alku.

Reaalilukujonojen suppeneminen on seuraavan lauseen avulla periaatteessa mahdollista karakterisoida jonon itsensä alkioiden avulla (tietämättä sitä, mikä on jonon raja–arvo). Vastaava tulos ei päde rationaalilukujen joukossa $\mathbf{Q}$!

Lause 1.6. Lukujono (x_n) suppenee (johonkin reaalilukuun) jos ja vain jos seuraava pätee: jokaista $r > 0$ kohti voidaan löytää luonnollinen luku N siten että

$$|x_n - x_{n+k}| < r,$$

kunhan $n > N$ ja k on mikä tahansa luonnollinen luku.

Todistus sivuutetaan toistaiseksi.

Palataan yllä olevaan esimerkkiin jonosta (x_n), jonka n:s alkio on π:n desimaaliesitys $n-1$:n desimaalin tarkkuudella. Tällöin jokainen x_n on rationaaliluku, ja lisäksi jono toteuttaa Lauseen 1.6 ehdon. Mutta jonon raja–arvo π ei ole rationaalinen. Siispä Lause 1.6. ei päde rationaalilukujen joukossa!

Lauseen 1.6. ehdon toteuttavaa jonoa sanotaan Cauchyn jonoksi. Lause 1.6. voidaan siis formuloida sanomalla, että reaalilukujen joukossa jokainen Cauchyn jono suppenee (ja kääntäen jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono). Cauchyn jonon käsite voidaan formuloida hyvinkin yleisissä esim. niin sanotuissa metrisissä avaruuksissa (jotka voivat olla esim. ääretönulotteisia vektoriavaruuksia). Tällöin kysymys Cauchyn jonojen suppenemisesta kyseisessä avaruudessa on melko keskeinen monien teoreettisten ja toisinaan numeeristenkin näkökohtien kannalta.

Otamme lopuksi käyttöön pari termiä. Sanomme, että (hajaantuva) lukujono (x_n) kasvaa rajatta, jos jokaista mielivaltaista annettua positiivista reaalilukua M kohti voidaan löytää indeksi $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$x_n > M,$$

kun $n > N$. Tällöin merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Vastaavasti sanomme, että lukujono (x_n) pienenee rajatta, jos jokaista mielivaltaista annettua negatiivista reaalilukua M kohti voidaan löytää indeksi $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$x_n < M,$$

kun $n > N$. Tätä merkitäään $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Oppikirjasta on syytä lukea aiheet “Sandwich theorem”, s.613–614, sekä l’Hopitalin säännön käyttäminen, s. 614–616.

1.2 Rekursiivisesti määritellyt lukujonot

Olkoon A rajoitettu tai rajoittamaton väli $\mathbf{R}$:ssä ja $f : A \to A$ jatkuva funktio. Tarkastellaan yhtälöä

$$f(x) = x.$$

Kurssilla Analyysi I, luku 2.6, esitettiin, kuinka tämä yhtälö voidaan toisinaan ratkaista iteroimalla. Tutkimme nyt iteraatiomenetelmän suppenemista hiukan toisesta näkökulmasta.

Lause 1.7. Olkoon $x_0 \in A$ ja määritellään rekursiivisesti jono (x_n) kaavalla $x_{n+1} = f(x_n)$ (siis iteroimme funktiota f alkuarvona x_0).

Jos jono (x_n) suppenee, sen raja-arvo c on yhtälön (1.2) ratkaisu.

Verrattuna Analyysi I kurssilla esiteltyyn tulokseen, tässä ei tarvita estimaattia f:n derivaatalle.

Todistus. Koska f on jatkuva, sille pätee $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Näin ollen

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = c.$$

Esimerkki. Etsitään yhtälön

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - x + 1 = 0$$

yksi ratkaisu likimääräisesti. Yhtälö on muotoa $f(x) = x$, kun määritellään $f(x) = (\frac{x}{2})^{1/3} + 1$; joukoksi A voidaan valita esimerkiksi positiivinen reaaliakseli. Funktio f on selvästi jatkuva A:ssa. Asetetaan $x_0 = 1$ ja

$$x_{n+1} := \left(\frac{x_n}{2}\right)^{1/3} + 1.$$

Väitämme, että näin määritelty jono (x_n) suppenee. Tämä johtuu tällä kertaa siitä, että jono on kasvava ja rajoitettu (Lause 1.5.). Jos nimittäin $1 \le x_n < 2$, niin

$$x_{n+1} = \left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 \ge \frac{x_n}{2} + 1 \ge \frac{x_n}{2} + \frac{x_n}{2} = x_n,$$

eli jono on kasvava. Toisaalta myös

$$x_{n+1} = \left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 \le 1 + 1 = 2,$$

koska $x_n < 2$. Siis jono on rajoitettu. Lauseen 1.2 kohta 3 nojalla voimme vielä vetää sen johtopäätöksen, että raja-arvo, eli alkuperäisen yhtälön ratkaisu, on välillä $[1, 2]$. Ratkaisulle saadaan mielivaltaisen tarkkoja approksimaatioita laskemalla jonon ensimmäisiä alkioita eli iteroimalla funktiota f.

1.3 Sarja ja sen suppeneminen

Sarjalla tarkoitetaan summaa, jossa on ääretön määrä termejä; täsmällinen määritelmä on alla. Esimerkiksi

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

ja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

ovat sarjoja. Kun laskemme ensin mainitun ensimmäisiä termejä yhteen, havaitaan tietenkin, että n:n ensimmäisen termin summa on n. Koko sarjan "summa on ääretön". Toinen sarja käyttäytyy aivan eri tavalla. Sen n:s termi on 2^{-n+1}. Lasketaanpa kuinka monta termiä tahansa yhteen, summa pysyy luvun 2 alapuolella.

Tutkimme näitä asioita nyt systemaattisesti.

Määritelmä 1.7. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reaalilukujono. Muodostamme uuden jonon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ seuraavasti:

$$s_1 := x_1 \ , \quad s_2 = x_1 + x_2 \ , \quad s_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

ja yleisesti määritellään

$$s_n := x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Sarjaksi sanomme paria $((x_n)_{n=1}^{\infty}, (s_n)_{n=1}^{\infty})$. Tässä x_n on sarjan n:s termi ja luku s_n on nimeltään sarjan n:s osasumma. Käytämme tässä määritellylle sarjalle kuitenkin lyhyempää merkintää

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{tai} \quad x_1 + x_2 + x_3 \ldots .$$

Määritelmä 1.8. Sanomme, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja että sen summa on s, jos jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee ja sen raja–arvo on s. Tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s.$$

Jos sarja ei suppene, sanomme, että se hajaantuu.

Esimerkki. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}?$$

Kaikilla $k \in \mathbf{N}$ pätee identiteetti

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

(tarkista!). Tämän avulla voidaan laskea s_n:

$$s_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5},$$

$$s_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6},$$

ja yleisesti

$$s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}.$$

(Tämän voi esimerkiksi todistaa induktiolla.) Tästä nähdään, että $\lim_{n\to\infty} s_n = 1/3$. Sarja on siten suppeneva ja sen summa on $1/3$.

Esimerkki. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k}{k+1}?$$

Nyt

$$s_n = \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \ldots + \log \frac{n}{n+1} = \log\Big(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1}\Big), = \log\Big(\frac{1}{n+1}\Big),$$

ja tämä lähestyy $-\infty$:tä, kun $n \to \infty$. Sarja hajaantuu.

Esimerkki. Suppeneeko sarja

$$3 + 3 + 3 + 3 + \ldots?$$

Sarjan n:s osasumma on $3n$, joka kasvaa rajatta kun $n \to \infty$. Sarja hajaantuu.

Esimerkki. Suppeneeko sarja

$$3 + (-3) + 3 + (-3) + 3 + (-3) + \ldots?$$

Osasummien jono on $(3, 0, 3, 0, 3, 0, \ldots)$. Tämä jono tosin pysyy rajoitettuna, mutta se ei kuitenkaan suppene. Sarja hajaantuu.

1.4 Geometrinen sarja.

Sarjaa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ sanotaan geometriseksi sarjaksi, mikäli sillä on se ominaisuus, että peräkkäisten termien suhde

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}$$

ei riipu indeksistä k. Voidaan näyttää, että sarja on silloin muotoa

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots, \tag{8}$$

missä reaaliluku x on nimeltään sarjan suhdeluku.

Lause 1.10. Olkoon $a \neq 0$ geometriselle sarjalle (8). Sarja suppenee, kun $|x| < 1$, ja tällöin sen summa on

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = \frac{a}{1-x}. \tag{9}$$

Sarja hajaantuu, kun $|x| \geq 1$.

Todistus. Induktiolla näytetään helposti, että geometrisen sarjan n:s osasumma on

$$S_n = a\frac{1-x^n}{1-x},$$

kun $x \neq 1$. Näin ollen jono $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee raja–arvoon $\frac{a}{1-x}$, mikäli $|x| < 1$. Jos $|x| > 1$, jono $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ hajaantuu, ja samoin myös jono $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ hajaantuu (lauseet 1.3. ja 1.4.).

Tapauksessa $x = 1$ sarja on muotoa $a + a + a + \dots$ ja tapauksessa $x = -1$ muotoa $a - a + a - a + \dots$; nämä molemmat hajaantuvat, vrt. esimerkit edellä.

Esimerkkejä. Sarjalle

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

pätee $a = 1$ ja suhdeluku $x = 1/2$. Sarja suppenee ja summa on $3/(1-1/2) = 6$.

Sarjalle

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \dots$$

samoin $a = 1$, $r = -1/2$ ja summa on $2/3$. Jos sarja on annettu muodossa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{3}{5}\Big)^k,$$

se kirjoitetaan muodossa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5}\Big(\frac{3}{5}\Big)^k,$$

mistä nähdään, että $a = 3/5 = x$ ja summa on

$$\frac{3}{5}\frac{1}{1-3/5} = \frac{3}{2}.$$

Sarja

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^4}{16} + \dots$$

hajaantuu, koska suhdeluku on ykköstä suurempi.

Esimerkki. Pomppiva pallo. Oppikirja, sivu 631.

Esimerkki. Lausu päättymätön jaksollinen desimaaliluku $7.353535\ldots =: 7.\overline{35}$ kahden kokonaisluvun osamääränä.

Ratkaisu. Kirjoitetaan geometrisen sarjan summakaavan avulla

$$
\begin{aligned}
7.353535\ldots &= 7+\frac{35}{100}+\frac{35}{100^2}+\frac{35}{100^3}+\ldots && (10)\\
&= 7+\frac{35}{100}\Big(1+\frac{1}{100}+\Big(\frac{1}{100}\Big)^2+\ldots\Big)\\
&= 7+\frac{35}{100}\Big(\frac{1}{99}\Big)=7+\frac{35}{99}=\frac{728}{99}. && (11)
\end{aligned}
$$

1.5 Perustuloksia suppenemisesta.

Lause 1.11. Suppenevalle sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ pätee aina $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

Todistus. Koska $x_k = S_k - S_{k-1}$ ja $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} S_{k-1}$, saadaan $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

Esimerkki. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-10}{n+8}$$

ei suppene. Jos se suppenisi, lauseen 1.11. mukaan pätisi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-10}{n+8} = 0,$$

mikä on silkkaa pötyä.

Lause 1.12. Olkoon $p \in \mathbf{N}$. Sarja

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} x_k = x_{p+1} + x_{p+2} + x_{p+3} + \ldots$$

suppenee, jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee. Jos suppeneminen todella tapahtuu, pätee

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k.$$

Todistus sivuutetaan. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja $n \in \mathbf{N}$, niin $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ on sarjan n:s jäännöstermi, ja sitä merkitään symbolilla R_n. Esimerkiksi geometrisen sarjan $1 + x + x^2 + \ldots$, $|x| < 1$, jäännöstermi on

$$R_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n}{1-x}.$$

Annetun sarjan termejä “ryhmittelemällä” voidaan muodostaa uusia sarjoja. Uusien sarjojen suppenemisominaisuudet eivät välttämättä ole samat kuin alkuperäisen sarjan. Olkoon sarja $\sum x_k$ annettu, ja olkoon $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ aidosti kasvava jono luonnollisia lukuja (määritellään $k_0 = 0$). Muodostetaan uusi sarja siten, että sen n:s termi on

$$y_n := x_{k_{n-1}+1} + \ldots + x_{k_n}, \tag{12}$$

siis

$$y_1 := x_1 + x_2 + \ldots x_{k_1} \ , \quad y_2 := x_{k_1+1} + \ldots x_{k_2} \ , \text{ jne.}$$

Lause 1.13. Jos sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja sen summa on a, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

missä y_n on määritelty kaavalla (12), suppenee, ja sen summa on a.

Väite seuraa siitä, että uuden sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ osasummien jono on alkuperäisen sarjan osasummien jonon osajono. Koska jälkimmäinen suppenee, suppenee myös edellinen, lause 1.2.

Esimerkki. Lauseen 1.13. käänteinen väite ei tietenkään päde. Olkoon $x_k = 4(-1)^k$, eli joka toinen sarjan $\sum x_k$ termi on 4, joka toinen -4. Sarja ei suppene. Valitaan yllä $k_n := 2n$ kaikilla n; silloin

$$y_1 = -4 + 4 = 0 \ , \quad y_2 = -4 + 4 = 0,$$

ja samoin kaikki muutkin termit sarjassa $\sum y_n$ ovat nollia; tämä sarja suppenee.

Käänteinen väite pätee, jos tehdään lisäoletus.

Lause 1.14. Oletetaan, että on annettu jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, jolle $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ ja että sarja

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) + \ldots \tag{13}$$

suppenee ja sen summa on a. Silloin myös $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, ja summa on a.

Todistuksen idea. Sarjan (13) suppenemisesta seuraa, että sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ osasummien jonon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ suppenee raja–arvoon a. Edelleen,

$S_{2n+1} = S_{2n} + x_{2n+1}$, missä $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$. Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = a$. Tämän avulla voidaan näytää, että $\lim_{n\to\infty} S_n = a$, vrt. jonon raja–arvon määritelmä.

Lause 1.15. Oletetaan, että sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat, summina a ja b; olkoon $r \in \mathbf{R}$. Tällöin sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} r x_k$$

suppenevat, ja niiden summat ovat $a + b$ sekä ra, vastaavasti.

Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki. Tutki, millä x:n arvoilla suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\Big(\frac{x}{4}\Big)^n + \Big(\frac{1}{4x}\Big)^n \Big) \tag{14}$$