DISKREETTIÄ MATEMATIIKKAA OPETTAJILLE

Martti E. Pesonen

Uudistettu versio
1. kesäkuuta 2001

Lukijalle

Kurssi *Diskreettiä matematiikkaa opettajille* pidettiin ensimmäisen kerran kesällä 1994, jolloin uusi luokanopettajaksi opiskeleville tarkoitettu 15 opintoviikon matematiikan approbatur-kokonaisuus polkaistiin käyntiin.
Nykyään kyseinen approbatur-paketti on saanyt lisämääreen "didaktinen", jolla se pyrkii profiloitumaan enemmän pedagogiseen suuntaan kuin "tavallinen" approbatur, jossa keskeisenä piirteenä on itse sisältö. *Didaktinen matematiikka* voisi parhaimmillaan olla *matemaattisen sisällön opetusta ja opiskelua jollain tiedostetulla, systemaattisesti käytetyllä pedagogisella menetelmällä.* Tässä suhteessa opetus on murrosvaiheessa, eri kursseilla vasta haetaan niihin sopivia erityisjärjestelyjä.
Tämä kyseisen kurssimateriaalin uudistettu versio sisältää melkoisesti ratkaistuja esimerkkejä sekä tehtäviä, joista suurin osa on tarkoitus ratkaista ohjatusti opetustilaisuuksissa. Kurssin aikana sovitaan, mitä asioita kurssin lopuksi pidettävässä tentissä tulee osata.

Mitä *diskreetti matematiikka* sitten on?
Karkeimmin sanottuna: perinteinen matematiikka jaetaan kahteen pääosaan, *jatkuvaan* ja *diskreettiin*. "Jatkuvalla matematiikalla" tarkoitetaan mm. jatkuvien ilmiöiden kuten liikkeen kuvaamiseen sopivia matemaattisia rakenteita: reaaliluvut ja yleisemmin vektorit, raja-arvo, jatkuvat ja derivoituvat funktiot, integraali jne. "Diskreetiksi matematiikaksi" taas on ryhdytty nimittämään sellaista matematiikkaa, joka ei sisällä jatkuvuusaspektia (topologiaa), vaan tutkii äärellisten tai ainakin vain numeroituvasti äärettömien ilmiöiden matemaattista mallitusta käyttäen apuna mm. logiikkaa, joukko-oppia, relaatioita ja funktioita, laskutoimituksia ja abstraktia algebraa sekä kombinatoriikkaa. Tutkittavia kohteita ovat mm. lukumääräongelmat, verkko-ongelmat, algoritmien ja automaattien teoria, lukuteoria, ...
Itse nimitys *diskreetti matematiikka* on vasta viime vuosikymmenien tuote. Diskreetti matematiikka ei ole mikään itsenäinen matematiikan sektori, vaan kaikki matematiikan pääsektorit sisältävät enemmän tai vähemmän diskreettejä näkökulmia.

Kirjallisuutta: *McEliece, Ash ja Ash:* Introduction to discrete mathematics. – McGraw-Hill, 1989.

Joensuussa 4.6.2001
Martti E. Pesonen
`Martti.Pesonen@Joensuu.Fi`

Sisältö

Merkinnät

Kurssilla käytetään mm. seuraavia vakiintuneita logiikan, joukko-opin ym. merkintöjä:

$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$	ei, tai, ja, seuraa, yhtäpitävä
$\exists$, $\forall$	on olemassa, kaikilla
$\in$, $\ni$	kuuluu joukkoon
$\subseteq$ tai $\subset$	osajoukko, aito osajoukko
$\cup$, $\cup_{i=1}^{n}$, $\cup_{i=1}^{\infty}$, $\cup_{i\in I}$	yhdisteitä
$\cap$, $\cap_{i=1}^{n}$, $\cap_{i=1}^{\infty}$, $\cap_{i\in I}$	leikkauksia
$\sum$, $\sum_{i=1}^{n}$, $\sum_{i=1}^{\infty}$, $\sum_{i\in I}$	summia
$\overline{A}$, $\setminus$	komplementti, erotus
$\times$	joukkojen tulo
xRy	x relaatiossa y:hyn
$S \circ R$	yhdistetty relaatio (funktio)
$f : A \to B$	kuvaus A:lta B:lle
$x \mapsto f(x)$	x kuvautuu alkiolle $f(x)$
$\mathcal{P}(A)$	potenssijoukko
$n(A)$	A:n alkiomäärä
$P(A)$	todennäköisyys
$:=$	määritellään
$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	luonnolliset luvut
$\mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	perusluvut
$[0] := \emptyset$	lukumääräjoukko:
$[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$	jos $n \in \mathbf{N}$
$\mathbf{Z}$	kokonaisluvut
$\mathbf{Q}$	rationaaliluvut
$\mathbf{R}$	reaaliluvut
$\mathbf{R}^n := \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R} \,\}$	euklidinen n-ulotteinen avaruus
$]a, b[$, $[a, b]$	avoin, suljettu väli
$]a, b]$, $[a, b[$	puoliavoimet välit

1 LOGIIKKAA JA LOOGISTA PÄÄTTELYÄ

Logiikka on matematiikan ja filosofian välimaastoon luettava itsenäinen tiede, jonka tehtävänä on koota inhimillisessä ajattelussa esiintyvät lait ja rakentaa niistä ristiriidaton, yksinkertainen, mutta mahdollisimman täydellinen järjestelmä.
Logiikan perusobjekteja ovat *tosiksi* tai *epätosiksi* sovittavat ilmaukset tai väittämät, *lauseet*. Esimerkiksi ilmaus

> ”Maa on hieman navoiltaan litistynyt pallo.”

voitaneen nykyään helposti sopia todeksi lauseeksi, vaikkakaan näin ei ole aina ollut.

Logiikka ei puutu siihen, onko jokin perusväite sellaisenaan tosi vai ei, vaan se pyrkii tilanteessa, jossa tietyt väitteet on hyväksytty tosiksi, ratkaisemaan, mitä muita näistä väitteistä johdettuja väitteitä on pidettävä tosina.

Lauselogiikaksi eli *propositiologiikaksi* sanotaan totuusarvoiltaan yksiselitteisten *suljettujen lauseiden* ja niistä logiikan operaatioiden avulla *johdettujen* lauseiden totuusarvojen tarkastelua, ks. Luku 1.1.
Lausefunktiologiikan eli *predikaattilogiikan* avulla puolestaan tutkitaan – enimmäkseen lauselogiikasta saaduin menetelmin – *avointen lauseiden* loogisia arvoja. Avoimen lauseen totuusarvo voi riippua joistakin muuttujista, ja ennen totuusarvon määrittämistä täytyy lauseesta muodostaa suljettu lause sijoittamalla muuttujille arvot tai käyttämällä *kvantifiointioperaattoreita* eli *kvanttoreita*, ks. Luku 1.2.
Luvussa 1.3 luomme katsauksen matemaattisen todistamisen loogiseen perustaan.

1.1 Lauselogiikkaa

1.1.1 Lause ja totuusarvot

Määritelmä 1.1.1 Logiikassa *lause* (*statement*, *proposition*) tarkoittaa ilmausta tai väitettä, jolla on jompikumpi totuusarvoista *tosi* T (*true*) tai *epätosi* E (*false*). Todelle käytetään myös symbolia 1 ja epätodelle 0.

Tarkasti ottaen jokaisesta ilmauksesta saadaan lause liittämällä siihen jompikumpi totuusarvo, mutta *yleensä on järkevää liittää reaalimaailman ilmauksiin niiden havainnolliset totuusarvot.*
Reaalimaailman ilmauksen paikkansapitävyys, sen *havainnollinen* totuusarvo, voi eri yhteyksissä, eri ajanhetkinä ja eri ihmisten mielessä vaihdella.

Logiikan kannalta lauseen totuusarvon tulee kuitenkin olla yksiselitteinen; kussakin tilanteessa käytettävien lauseiden totuusarvot tulee tarkastelijoiden määrittää tai vaikkapa sopia keskenään.

Esimerkki 1.1.2 Mitkä seuraavista reaalimaailman ilmauksista

P: ”Sataa vettä.”

Q: ”Sataa vanhoja ukkoja.”

R: ”Tuhatta ja sataa.”

voidaan todeta lauseiksi liittämällä niihin niiden havainnolliset totuusarvot?

Ratkaisu. Ilmausta Q pidettäneen yleisesti epätotena lauseena. Ilmaukselle P saadaan totuusarvo vaikkapa vilkaisemalla ulos ikkunasta (kyseessähän on itse asiassa ajasta ja paikasta riippuva avoin lause). Sen sijaan R:lle ei voitane totuusarvoa määrätä, joten se ei ole logiikan mielessä lause (ellei sille totuusarvoa erikseen sovita).

Tehtävä 1.1.3 Mitkä seuraavista ovat mielestäsi logiikan lauseita ja mitkä totuusarvot niille asettaisit:

P: ”Avaa ikkuna.” ______

Q: ”Rooma on Ranskassa.” ______

R: ”$3 < 2$.” ______

S: ”Arvoilla $x \neq 0$ on $x^2 + 1 > 0$.” ______

Tehtävä 1.1.4 Edustakoot k, l ja m mitä tahansa kokonaislukuja. Mitkä seuraavista lauseista ovat tosia:

P: ”$k(l + n) = kl + kn$.” ______

Q: ”$(m+1)^2 + n^2 + 2m^2 > 0$.” ______

R: ”$2k$ on parillinen luku.” ______

S: ”Jos m on parillinen, on olemassa kokonaisluku n, jolle $m = 2n$.” ______

1.1.2 Konnektiivit

Logiikassa lauseita yhdistellään loogisilla operaattoreilla, nk. *konnektiiveillä*, joilla on ilmeiset vastineet reaalimaailman lauseiden yhdistelyssä:

$\neg$	negaatio	eli	”ei”	vaihtaa totuusarvon
$\vee$	disjunktio	eli	”tai”	edes yksi tosi
$\wedge$	konjunktio	eli	”ja”	kaikki tosia
$\Rightarrow$	implikaatio	eli	”seuraa”	”jos ... niin”
$\Leftrightarrow$	ekvivalenssi	eli	”yhtäpitävää”	samat totuusarvot

Määritelmä 1.1.5 Olkoot P ja Q logiikan lauseita.

a) Lauseen P *negaatio* $\neg P$ on lause, jolla on päinvastainen totuusarvo kuin lauseella P.

b) Lauseiden P ja Q *disjunktio* $P \vee Q$ on lause, jonka totuusarvo on tosi, jos P on tosi tai Q on tosi, ja epätosi, jos P ja Q ovat epätosia.

c) Lauseiden P ja Q *konjunktio* $P \wedge Q$ on lause, jonka totuusarvo on tosi, jos P ja Q ovat tosia, muutoin epätosi.

d) Lauseiden P ja Q *implikaatio* $P \Rightarrow Q$ on lause, jonka totuusarvo on epätosi, jos P on tosi ja Q epätosi, muulloin tosi.

e) Lauseiden P ja Q *ekvivalenssi* $P \Leftrightarrow Q$ on lause, jonka totuusarvo on tosi, jos lauseilla P ja Q on sama totuusarvo, muulloin epätosi.

Johdettuja lauseita ovat kaikki ne lauseet, jotka saadaan äärellisen monella logiikan operaatioilla joistakin peruslauseista.

Huomautus 1.1.6 Negaatio kohdistuu yhteen, sitä seuraavaan lauseeseen, muut yhdistävät kahta lausetta, jotka voivat kaikki olla itsekin konnektiiveilla johdettuja; vrt. lukujen laskutoimitukset!

Esimerkki 1.1.7 Oletetaan, että lauseet P, Q ja R ovat tosia. Mitkä ovat seuraavien johdettujen lauseiden totuusarvot:

a) $P \wedge (Q \wedge R)$

b) $P \Rightarrow (\neg Q)$

c) $(\neg(P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow Q$

Ratkaisu. a) P ja $Q \wedge R$ ovat tosia, joten lause on tosi.
b) P on tosi ja $\neg Q$ epätosi, joten implikaatio on epätosi.
c) Koska Q on tosi, on ekvivalenssi tosi täsmälleen silloin kun vasen puoli on tosi. Implikaatio $P \Rightarrow R$ on tosi, joten sen negaationa vasen puoli on epätosi, joten lause on epätosi.

Tehtävä 1.1.8 Oletetaan lauseista P, Q ja R, että P on epätosi, mutta muut tosia. Mitkä ovat seuraavien johdettujen lauseiden totuusarvot:

a) $P \wedge (Q \vee R)$ ____________________

b) $(P \wedge Q) \vee R$ ____________________

c) $(\neg(P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow Q$ ____________________

Monimutkaisten johdettujen lauseiden totuusarvot (usein vielä peruslauseiden eri totuusarvoilla) määritetään nk. totuusarvotaulukoilla, ks. Luku 1.1.3. Harjoitellaan vielä kielellisten ilmausten kääntämistä logiikan kielelle.

Esimerkki 1.1.9 Olkoot

P: ”Neljältä sataa.”

Q: ”Haen tyttären pyörällä.”

R: ”En hae tytärtä autolla.”

Silloin esimerkiksi

$\neg P$ tarkoittaa ”Neljältä ei sada.”

$Q \vee (\neg R)$ tarkoittaa ”Haen tyttären pyörällä tai autolla.”

$(\neg Q) \Leftrightarrow P$ tarkoittaa ”En hae tytärtä pyörällä jos ja vain jos neljältä sataa.”

Tehtävä 1.1.10 Mitä tarkoittavat Esimerkin 1.1.9 tapauksessa lauseet

a) $(\neg P) \Rightarrow Q$ ____________________

b) $Q \wedge (P \vee \neg P)$ ____________________

c) $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ ____________________

d) $P \Rightarrow \neg R$ ____________________

1.1.3 Totuusarvotaulukko

Annetuista peruslauseista konnektiiveilla johdetun lauseen totuusarvot saadaan selville mekaanisilla laskuilla, jotka kannattaa formuloida *totuusarvotaulukoksi* (*truth table*). Totuusarvotaulukon vasempaan laitaan asetetaan alekkain peruslauseiden P_1, P_2, ..., P_n kaikki 2^n totuusarvoyhdistelmää. Näiden oikealle puolelle lasketaan haluttujen johdannaisten totuusarvot kullakin yhdistelmällä.

Esimerkki 1.1.11 Tai-konnektiivin taulukoksi saadaan:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	E	T
E	T	T
E	E	E

Tehtävä 1.1.12 Muodosta implikaation taulukko (ks. Määritelmä 1.1.5):

P	Q	$Q \Rightarrow P$
T	T	T
T	E	
E	T	
E	E	

Taulukossa 1 ovat yhdellä operaatiolla saatujen johdettujen lauseiden totuusarvot taulukkona (ks. Määritelmä 1.1.5).

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	E	T	T	T	T
T	E	E	T	E	E	E
E	T	T	T	E	T	E
E	E	T	E	E	T	T

Taulukko 1: Logiikan peruslaskutaulukko

Yleisessä tapauksessa johdettu lause pilkotaan sellaisiksi välituloksiksi, joiden totuusarvot saadaan peruslaskutaulukosta 1. Äärimmäiseksi oikealle asetetaan kysytty lause tai lauseet ja menetellään kuten yllä (tai alla).

Esimerkki 1.1.13 Muodostetaan Tehtävän 1.1.10 kohdan c) lauseen

$$S : (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$$

totuusarvotaulukko:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$Q \wedge \neg P$	S
T	T	E	E	E	E	E
T	E	E	T	T	E	T
E	T	T	E	E	T	T
E	E	T	T	E	E	E

Tehtävä 1.1.14 Millä seuraavista lauseista $\neg P$, $Q \vee (\neg P)$, $(\neg Q) \Leftrightarrow P$ on samat totuusarvot kuin Esimerkin 1.1.13 lauseella

$$S : (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)?$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$Q \vee (\neg P)$	$(\neg Q) \Leftrightarrow P$	S
T	T	E		E		
T	E					
E			E			
E						

Esimerkki 1.1.15 Pilkotaan Esimerkin 1.1.7 kohdan c) lause

$$L : (\neg(P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow Q$$

osiin, joiden osatulokset saadaan suoraan peruslaskutaulukosta 1.

Ratkaisu. Lause on kahden lauseen $\neg(P \Rightarrow R)$ ja Q ekvivalenssi. Näistä ensimmäinen on lauseen $P \Rightarrow R$ negaatio. Taulukon otsikkoriville kirjoitetaan esimerkiksi

$$P \quad Q \quad R \quad P \Rightarrow R \quad \neg(P \Rightarrow R) \quad Q \quad (\neg(P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow Q$$

Tehtävä 1.1.16 Laadi loppuun Esimerkin 1.1.15 lauseen

$$L : (\neg(P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow Q$$

totuusarvotaulukko:

P	Q	R	$P \Rightarrow R$	$\neg(P \Rightarrow R)$	Q	L
T	T	T	T			
T	T	E	E			
T	E	T	T			
T	E					
E						
E						
E						
E						

1.1.4 Looginen ekvivalenssi ja tautologia

Määritelmä 1.1.17 Kaksi samoista peruslauseista johdettua lausetta L ja M ovat *loogisesti ekvivalentit* (merkitään $L \equiv M$), jos niillä on samat totuusarvot jokaisella peruslauseiden totuusarvoyhdistelmällä. Käytännössä tämä tarkoittaa, että kun lauseiden L ja M totuusarvot on laskettu samaan taulukkoon kaikilla peruslauseiden totuusarvoyhdistelmillä, niin lauseiden L ja M totuusarvosarakkeet ovat identtiset.

Esimerkki 1.1.18 Tehtävässä 1.1.14 havaittiin lauseilla

$$\begin{aligned} L &: (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \\ M &: (\neg Q) \Leftrightarrow P \end{aligned}$$

olevan samat totuusarvot kaikilla peruslauseiden P ja Q yhdistelmillä. Ne ovat siis loogisesti ekvivalentteja:

$$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \equiv (\neg Q) \Leftrightarrow P.$$

Tehtävä 1.1.19 Osoita totuusarvotaulukon avulla, että

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T					
T	E					
E	T					
E	E					

Määritelmä 1.1.20 Johdettu lause on *tautologia*, jos se on tosi kaikilla peruslauseiden totuusarvoyhdistelmillä, ts. jos totuusarvosarake sisältää vain arvoja T.

Esimerkki 1.1.21 Osoitetaan tautologiaksi lause

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q :$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	E	E	E	T
E	T	T	E	T
E	E	T	E	T

Tehtävä 1.1.22 Osoita tautologioiksi lauseet

a) $P \Rightarrow (P \vee Q)$ __________________________________

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$

Looginen ekvivalenssi ja tautologia käyvät yksiin seuraavalla tavalla:

Lause 1.1.23 Kaksi lausetta P ja Q ovat loogisesti ekvivalentit jos ja vain jos $P \Leftrightarrow Q$ on tautologia.

1.1.5 Laskusääntöjä

Sulkujen käyttö. Johdetuissa lauseissa joudutaan käyttämään paljon sulkuja, jotta laskujärjestys tulee yksikäsitteisesti ilmi. Sulkuja voidaan kuitenkin vähentää – kuten luvuillakin laskettaessa – sopimalla operointijärjestys. Sovitaan konnektiiveille hierarkia, jota noudatetaan mikäli sulkein ei ole muuta ilmoitettu:

1. $\neg$ operoi ensin (vrt. luvun etumerkki)
2. $\vee$ ja $\wedge$ operoivat tasavertaisina seuraavaksi (sulut!)
3. $\Rightarrow$ operoi sitten
4. $\Leftrightarrow$ operoi viimeisenä.

Tehtävä 1.1.24 Poista turhat sulut seuraavista:

a) $(P \wedge (\neg Q)) \vee (\neg R)$ ______________________________

b) $(P \wedge (\neg R)) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (P \vee Q))$ ____________________

Totuusarvotaulukoiden avulla voidaan todistaa seuraavat loogiset ekvivalenttiudet, joita käyttäen logiikan lauseita voidaan muunnella tarpeen mukaan, esimerkiksi sieventää yksinkertaisempaan muotoon. Sovitaan vielä, että **T** tarkoittaa lausetta, jolla on aina arvona tosi.

Laskusääntöjä 1.1.25 Kaikille lauseille P, Q ja R pätee:

$P \equiv P$	identiteetti
$P \wedge P \equiv P \vee P \equiv P$	idempotenssilait
$\neg\neg P \equiv P$	kaksoisnegaatio
$\neg(P \wedge \neg P) \equiv \mathbf{T}$	poissuljettu ristiriita
$P \vee \neg P \equiv \mathbf{T}$	poissuljettu kolmas
$\begin{cases} P \vee Q \equiv Q \vee P \\ P \wedge Q \equiv Q \wedge P \end{cases}$	vaihdannaisuus
$\begin{cases} P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \\ P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \end{cases}$	liitännäisyys
$\begin{cases} P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{cases}$	osittelulait
$\begin{cases} \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q \\ \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \end{cases}$	de Morganin lait
$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$	kontrapositio
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	implikaatio disjunktioksi

Todistus. Osittain jo perusteltukin: ensimmäinen de Morganin laki Tehtävänä 1.1.19 ja kontrapositio Tehtävänä 1.1.22. Muut jätetään harjoitustehtäviksi. Q.E.D

Tehtävä 1.1.26 Sievennä lauseet

a) $\neg(P \wedge \neg Q)$ ______________________________

b) $P \wedge ((\neg P \vee Q) \vee \neg P)$ ______________________________

1.2 Lausefunktiologiikkaa

Usein tarvitaan nk. *avoimia* lauseita, joiden totuusarvo *riippuu tilanteesta*, esimerkiksi jonkin muuttujan arvosta.

1.2.1 Lausefunktiot

Esimerkki 1.2.1 Olkoot P_1 : ”1 on parillinen” ja P_2 : ”2 on parillinen”. Silloin P_1 on epätosi, kun taas P_2 on tosi.
Yksittäisten lauseiden sijasta voimme rakentaa ”parillisuudentestauskoneen” seuraavasti: Merkitään symbolilla

$P(n)$: ”n on parillinen luku”

Nyt esimerkiksi $P(1)$, $P(3)$ ja $P(13)$ ovat epätosia, mutta $P(2)$, $P(2)$ ja $P(14)$ tosia.

Määritelmä 1.2.2 Väite P on (yksipaikkainen) *lausefunktio*, jos $P(x)$ on lause jokaisella tarkasteltavalla arvolla x.
Vastaavasti voidaan määritellä kaksi-, tai kolmepaikkaisia lausefunktioita $P(x, y)$, $P(x, y, z)$ jne ...

Esimerkki 1.2.3 Muodostetaan lausefunktio Q, jolla voi testata, onko $x - 1 > 0$:

$Q(x) : x - 1 > 0$

Nyt ratkaisemalla epäyhtälön muotoon $x > 1$ saamme $Q(x)$ on tosi arvoilla $x > 1$.

Esimerkki 1.2.4 Olkoot muuttujien v, k ja p mahdolliset arvot

v on jokin viikonpäivä

k on jokin kalenterikuukausi

p on jokin luvuista 1, 2, 3, ..., 31.

Silloin lausefunktiolle

$P(v, k, p)$: ”tänään on v, k:n p. päivä”.

voidaan aina määrittää totuusarvo, kylläkin tarkasteluajankohdasta riippuen.
Esimerkiksi $P(\text{sunnuntai}, \text{kesäkuu}, 3)$ ei ole tosi kurssipäivinä, mutta oli kurssia edeltävänä sunnuntaina.

Tehtävä 1.2.5 Mitkä kaikista lauseista $P(v, k, p)$ ovat tänään tosia?
Entä mitkä eivät ole koskaan tosia?

1.2.2 Kvanttorit

Lausefunktioista saadaan mielenkiintoisia lauseita käyttäen nk. *kvanttoreita kaikilla* $\forall$ ja *on olemassa* $\exists$. Kvanttorien esiintymisjärjestys on näissä oleellista!
Kvanttorien avulla saadaan yhden muuttujan lausefunktioista kaksi eri lausetta:

$$\begin{array}{lll} \forall\, x: & p(x) & (\text{ kaikilla } x: p(x)) \\ \exists\, x: & p(x) & (\text{ ainakin yhdellä } x: p(x)) \end{array}$$

Esimerkki 1.2.6 Reaalilukuja koskevista lauseista

a) $P: \forall\, x: x^2 = 4$

b) $Q: \exists\, x: x^2 = 4$

P on selvästi epätosi, mutta Q on tosi, sillä toisaalta esimerkiksi $3^2 \neq 4$, mutta kuitenkin $2^2 = 4$.

Tehtävä 1.2.7 Mitkä seuraavista kokonaislukuja koskevista lauseista ovat tosia?

a) $P: \forall\, n: n^2 > n$ ______________________________

b) $Q: \exists\, n: n^2 < n$ ______________________________

c) $R: \exists\, n: n^2 = 144$ ______________________________

d) $R: \forall\, n: n^2 - n$ on parillinen ______________________________

Perustele tarkoin!

Kahden muuttujan lausefunktion avulla saadaan (periaatteessa) jo kahdeksan erilaista variaatiota:

$$\begin{array}{lll} \forall\, x, \forall\, y: & p(x,y) & (\text{ kaikilla } x \text{ ja kaikilla } y: p(x,y)) \quad (1) \\ \forall\, x, \exists\, y: & p(x,y) & (\text{ kaikilla } x \text{ on olemassa } y: p(x,y)) \quad (2) \\ \exists\, x, \forall\, y: & p(x,y) & (\text{ on olemassa sellainen } x \text{ että kaikilla } y: p(x,y)) \quad (3) \\ \exists\, x, \exists\, y: & p(x,y) & (\text{ on olemassa } x \text{ ja on olemassa } y: p(x,y)) \quad (4) \\ \forall\, y, \forall\, x: & p(x,y) & (\text{ kaikilla } y \text{ ja kaikilla } x: p(x,y)) \quad (5) \\ \forall\, y, \exists\, x: & p(x,y) & (\text{ kaikilla } y \text{ on olemassa } x: p(x,y)) \quad (6) \\ \exists\, y, \forall\, x: & p(x,y) & (\text{ on olemassa sellainen } y \text{ että kaikilla } x: p(x,y)) \quad (7) \\ \exists\, y, \exists\, x: & p(x,y) & (\text{ on olemassa } y \text{ ja on olemassa } x: p(x,y)) \quad (8) \end{array}$$

Tehtävä 1.2.8 Edellisistä kahdeksasta loogisesti erilaisia on vain kuusi, mitkä parit ovat samoja?

Tehtävä 1.2.9 Keksi esimerkki kahden muuttujan lausefunktiosta, jolle kaavoilla (2) ja (3) on eri totuusarvo.

Tehtävä 1.2.10 Mitkä seuraavista kolmen muuttujan lausefunktion avulla muodostetusta lauseista ovat tosia:

a) $\exists\, x, \forall\, y, \forall\, z : x(y+z^2) = 0$ ____________________

b) $\forall\, x, \forall\, y, \exists\, z : x(y+z^2) = 0$ ____________________

c) $\forall\, x, \exists\, z, \forall\, y : x(y+z^2) = 0$ ____________________

d) $\forall\, x, \forall\, z, \exists\, y : x(y+z^2) = 0$ ____________________

e) $\forall\, x, \exists\, y, \forall\, z : x(y+z^2) = 0$ ____________________

f) $\exists\, z, \forall\, y, \forall\, x : x(y+z^2) = 0$ ____________________

g) $\exists\, y, \exists\, x, \forall\, z : x(y+z^2) > 0$ ____________________

1.3 Matemaattinen todistaminen ja päättelyprosessit

Tieteissä pyritään joistakin tosiksi hyväksytyistä peruslauseista, esimerkiksi *aksioomista*, lähtien johtamaan logiikan lakien avulla uusia lauseita. Yleensä tämä tapahtuu niin, että esitetään hypoteesi, otaksuma, ja pyritään *todistamaan* se.

1.3.1 Suora todistus

Olkoon P tosi lause ja Q todeksi osoitettava lause.
Suora todistus perustuu Esimerkin 1.1.21 tautologiaan

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Longrightarrow Q :$$

Kun osoitetaan, että $P \Rightarrow Q$ on tosi, on $P \wedge (P \Rightarrow Q)$ tosi. Koska koko lause on tautologia, on Q välttämättä tosi.

Käytännön todistuksissa ei oletus P yleensä yksin riitä, vaan apuna joudutaan käyttämään sopivia *ulkoisia totuuksia* U, esimerkiksi tunnettuja laskusääntöjä ja aikaisemmin todistettuja tuloksia. Nämä ulkoiset totuudet voidaan haluttaessa sisällyttää oletukseen kirjoittamalla oletus muotoon $P' \equiv P \wedge U$.

Esimerkki 1.3.1 Todistetaan suorasti:

Jos n on pariton kokonaisluku, niin n^2 on pariton kokonaisluku.

Ratkaisu. *Oletus-väitös-todistus-muodossa*:
Oletus. P: "n pariton kokonaisluku" tosi.
Väitös. Q: "n^2 pariton kokonaisluku" tosi.
Todistus. Käytetään ulkoista totuutta: pariton $n = 2k+1$ jollekin kokonaisluvulle k. Mutta lukujen laskusäännöistä seuraa

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k) + 1,$$

joka on pariton luku (myös ulkoinen totuus!). Siis Q on tosi. Q.E.D

1.3.2 Epäsuora todistus

Puhdas epäsuora todistus perustuu kontraposition $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$ ja suoran todistuksen yhdistämiseen; nimittäin myös

$$P \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P) \Longrightarrow Q$$

on tautologia. Oletetaan, että $\neg Q$ on tosi, so. tehdään *vastaoletus* eli *antiteesi*. Tämän avulla osoitetaan, että $\neg P$ on tosi. Koska tämä on vastoin oletuksia, ei Q voi olla epätosi ja on siten tosi.

Esimerkki 1.3.2 Todista uudelleen, nyt epäsuorasti:

> *Jos n on pariton kokonaisluku, niin n^2 on pariton kokonaisluku.*

Oletus. P: "n pariton kokonaisluku" tosi.
Väitös. Q: "n^2 pariton kokonaisluku" tosi.
Todistus. $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$, joten tehdään
Antiteesi: $\neg Q$ tosi eli n^2 on parillinen. Ulkoinen totuus: $n^2 = 2m$ jollekin kokonaisluvulle m. Harjoitustehtävänä todistetaan ulkoinen totuus:

> *Jos kokonaislukujen tulo ab on jaollinen alkuluvulla p, niin a tai b on jaollinen luvulla p.*

Luku $n^2 = n \cdot n$ on siis jaollinen alkuluvulla 2, joten n on jaollinen luvulla 2. Siis n on parillinen eli $\neg P$ on tosi.
Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten antiteesi on väärä ja väitös totta.
Q.E.D

Esimerkki 1.3.3 Todistetaan käänteinen tulos:

> *Jos n^2 on pariton, niin n on pariton.*

Oletus. Q tosi eli n^2 pariton.
Väitös. P tosi eli n pariton.
Todistus. *Antiteesi*: $\neg P$ tosi eli n parillinen. Silloin $n = 2k$ ja $n^2 = 2(2k^2)$, joka on parillinen. Siis $\neg Q$ on tosi. Tämä on vastoin oletusta, joten P on tosi.
Q.E.D

On siis todistettu kokonaan

Lause 1.3.4 Kokonaisluku n on pariton jos ja vain jos n^2 on pariton.

Epäsuora todistus voi olla myös ”kiero”, joskus voi olla edullisempaa johtaan antiteesista jokin muu epätosi tulos kuin $\neg P$, esimerkiksi $1 < 0$.

Yleinen epäsuora todistustapa perustuu tautologiaan

$$[P \wedge ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow \mathbf{E})] \Longrightarrow Q,$$

Oletetaan, että $\neg Q$ on tosi, so. tehdään *vastaoletus* eli *antiteesi*. Tämän ja oletuksen ”P on tosi” avulla osoitetaan jokin järjettömyys.

Tehtävä 1.3.5 Todista: ”Jos $x > 5$, niin $x > 4$.” niin, että saat oletuksen vastaoletuksen avulla tuloksen $0 > 1$.

1.3.3 Päättelyn johdonmukaisuus

Matemaattinen todistus sisältää yleensä loogisia päättelyitä. Päättelyn johdonmukaisuuden selvittämisessä voidaan käyttää totuusarvotaulukoita. Tämä tarkoittaa, että loogisen pätevyyden tarkastaminen voidaan *mekanisoida*.

Määritelmä 1.3.6 A. *Päättely* muodostuu kokoelmasta *premissejä* P_1, P_2, …, P_n ja *johtopäätöksestä* Q, joiden tulee olla logiikan lauseita. Sekä premissit että johtopäätös voivat olla peruslauseista johdettuja lauseita.

B. Päättelyä sanotaan *johdonmukaiseksi*, jos implikaatio

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \Longrightarrow Q$$

on tosi. Tämä tarkoittaa sitä, että aina kun kaikki premissit P_i ovat tosia, myös johtopäätöksen on oltava tosi.

Johtopäätös *saa* tietenkin olla tosi muillakin yhdistelmillä.

Esimerkki 1.3.7 Onko päättely:

Jos on eläkkeellä, saa alennuksen rautateillä. En ole eläkkeellä. Siis en saa alennusta rautateillä.

johdonmukainen?
Ratkaisu. Valitaan

P : ”Olen eläkkeellä.”

Q : ”Saan alennuksen rautateillä.”

Päättely koostuu nyt premisseistä $P \Rightarrow Q$ ja $\neg P$ ja johtopäätöksestä $\neg Q$:

$P \Rightarrow Q$	:	Jos on eläkkeellä, saa alennuksen rautateillä.
$\neg P$	:	En ole eläkkeellä.
$\neg Q$	:	En saa alennusta rautateillä

Muodostamme päättelylauseen $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg P) \Rightarrow \neg Q$ premissit ja johtopäätöksen sisältävän totuusarvotaulukon

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
T	T	T	E	E
T	E	E	E	T
E	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{E}$
E	E	T	T	T

kolmannella rivillä premissit ovat tosia, mutta johtopäätös ei. Päättely ei siis ole johdonmukainen.

Esimerkki 1.3.8 Onko seuraava päättely johdonmukainen:

> *Jos elintasoa jatkuvasti nostetaan, luonnonvarojen väheneminen ja luonnon saastuttaminen jatkuu. Jos luonnonvarojen väheneminen ja luonnon saastuttaminen jatkuu, ihmiskunta tuhoutuu taistelussa ehtyvistä luonnonvaroista tai menehtyy saasteisiin. Elintasoa nostetaan. Siis ihmiskunta tuhoutuu taisteluun ehtyvistä luonnonvaroista tai menehtyy saasteisiin.*

Ratkaisu. Olkoot

P : ”Elintasoa nostetaan.”

Q : ”Luonnonvarojen väheneminen ja luonnon saastuttaminen jatkuu.”

R : ”Ihmiskunta tuhoutuu taistelussa ehtyvistä luonnonvaroista tai menehtyy saasteisiin.”

Päättelyn $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge P) \Rightarrow R$ totuusarvotaulukossa (täydennä!)

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	P	R
T	T	T	T	T	T	T
T	T	E	E			
T	E	T	T			
T	E					
E						
E						
E						
E						

vain ensimmäisellä rivillä ovat premissit tosia. Koska tällöin johtopäätös on tosi, on päättely johdonmukainen.

2 JOUKOT JA LUKUMÄÄRÄT

2.1 Joukko-opin alkeita

Peleissä on aina jokin tarkkaan määritelty ympäristö, esimerkiksi
kortit – pelaajat
pallot – mailat – kenttä
ja tarkkaan sovitut säännöt, jotka koskevat kaikkia osallistujia.
Matematiikassa tällaisen ”peliympäristön” muodostavat joukot ja joukko-operaatiot, joita sitovat logiikkaan perustuvat säännöt, ks. Luku 1.

2.1.1 Joukko matemaattisena käsitteenä

Reaalielämän ongelmien matematisoinnissa, *mallinnuksessa*, on lisäksi sovittava vastaavuus ilmiön ja matemaattisen ympäristön, *matemaattisen mallin* välille.

Esimerkki 2.1.1 Anni kertoo, että heillä on kotona isä, äiti, kaksi veljeä, Pekka ja Ville, sekä hevonen ja kissa. Annin veli taas kertoo, että heidän perheeseensä kuuluu yksi sisar ja veli sekä hevonen ja koira.

Millaisesta perheestä on kyse?

Kertomusten mukaan voidaan koota kuvaa perheestä, johon kuuluvat ainakin isä, äiti, Anni, Pekka, Ville, hevonen, kissa ja koira, yhteensä 8 jäsentä.
Anni luetteli 6, veli 4, yhteensä 10. Luetelluissa oli – aivan ilmeisesti – päällekkäisyyksiä, mutta toisaalta kumpikaan ei luetellut kaikkia. Perheessä saattaa hyvinkin olla vain yllä luetellut 8 jäsentä!

Tavallinen aritmetiikka perheen koon selvittämiseksi ei siis sovellu suoraan Esimerkin 2.1.1 tilanteeseen, paljon paremmin sitä voidaan kuvata *joukoilla*.
Joukko (*set*) on kokoelma olioita, joita kutsutaan *alkioiksi* (*element, point*).
Joukon alkiot voivat itsekin olla joukkoja.
Sovitaan kuitenkin heti, että joukko ei voi olla itsensä alkio, koska käsite ”kaikkien joukkojen joukko” johtaisi ristiriitaan!
Joukko ilmaistaan yleensä

- kuvailemalla sen alkiot sanallisesti: esim. ”joukko A on nopan silmäluvut”
- luettelemalla sen alkiot: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- esittämällä sen alkiot täysin määräävä ehto:

$$A = \{\, n \mid n \text{ nopan silmäluku} \,\}.$$

Esimerkki 2.1.2 Esimerkin 2.1.1 tilanteessa Annin mukaan perhe on joukko

$$A = \{\,\text{isä, äiti, Pekka, Ville, hevonen, kissa}\,\}$$

Tehtävä 2.1.3 Ilmaise joukkona

a) perhe Annin veljen mukaan: $V =$ ____________________

b) perheen pienin koostumus: $P =$ ____________________

Nimityksiä. Käytämme seuraavia nimityksiä ja merkintöjä (ks. myös Merkinnät)

> Joukko, jossa ei ole yhtään alkiota, on *tyhjä joukko* (*empty set, void*), merkitään $\emptyset$ tai $\{\}$.
>
> Alkion x kuulumista joukkoon A merkitään $x \in A$, kuulumattomuutta taas $x \notin A$.
>
> Jos jokainen joukon A alkio on myös joukon B alkio, on A joukon B *osajoukko* (*subset*), $A \subseteq B$ (usein myös $A \subset B$).
>
> Joukot A ja B ovat *samat* (*equal*), jos niissä on täsmälleen samat alkiot, ts. jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$; tätä merkitään $A = B$. Jos $A \subseteq B$ ja $A \neq B$, on A *aito* osajoukko.

Kukin joukon alkio luetellaan tavallisesti vain kerran; esimerkiksi joukossa $\{1, 2, 1\}$ on vain alkiot 1 ja 2, joten

$$\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}.$$

Joukon alkioiden *lukumäärä* on siis siihen kuuluvien *eri* alkioiden määrä. Joukko-opillisten laskutoimitusten yhteydessä joukkoja on syytä käsitellä jonkin (sopivasti valitun) niitä kaikkia laajemman joukon, nk. *perusjoukon* osana.

Esimerkki 2.1.4 Esimerkeissä 2.1.1 ja 2.1.2 on $A \subseteq P$, $V \subseteq P$ ja $P \subseteq P$.

Tehtävä 2.1.5 Onko

a) $V \subseteq A$? ____________________

b) $A \subseteq V$? ____________________

c) $P \subseteq A$? ____________________

2.1.2 Joukko-operaatiot

Määritelmä 2.1.6 Olkoon E (perus)joukko ja A, B sen osajoukkoja. Joukkojen peruslaskutoimitukset ovat:

a) Joukon A *komplementti* (perusjoukossa E) on joukko $\overline{A}$, jonka alkioina ovat täsmälleen ne joukon E alkiot, jotka eivät kuulu joukkoon A.

b) Joukkojen A ja B *yhdiste* (union) $A \cup B$ on joukko, jossa on alkioina täsmälleen kaikki alkiot joukoista A ja B.

c) Joukkojen A ja B *leikkaus* (intersection) $A \cap B$ on joukko, jossa on alkioina täsmälleen joukkojen A ja B yhteiset alkiot.

d) Joukkojen A ja B *erotus* (difference) $A \setminus B$ on joukko, jossa on alkioina täsmälleen ne joukon A alkiot, jotka eivät ole joukon B alkiota.

Määritelmästä seuraa esimerkiksi, että

$$E \setminus A = \overline{A} \quad \text{ja} \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Edellisten lisäksi käytetään joskus käsitettä *symmetrinen erotus*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Tehtävä 2.1.7 a) Annin perheenä (ks. Esimerkki 2.1.2 ja Tehtävä 2.1.3) voimme pitää joukkoa

$A \cup V =$ ____

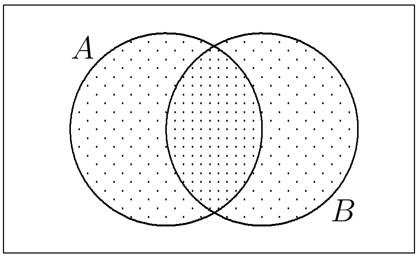
b) Mikä on Annin ja veljen luettelemien joukkojen symmetrinen erotus: ___
c) Onko $P \setminus A = V$? ____

Esimerkki 2.1.8 Jaanalla on lemmikkeinä papukaija, marsu ja kani ja Maijalla kissa, kani ja kaksi rottaa. Lemmikkijoukkojen matemaattinen yhdiste sisältää vain 5 eläinlajia ja leikkaus yhden. Jos saman lajin eläimet erotetaan toisistaan esim. nimillä, on yhdisteessä nyt 7 yksilöä ja leikkaus on tyhjä.

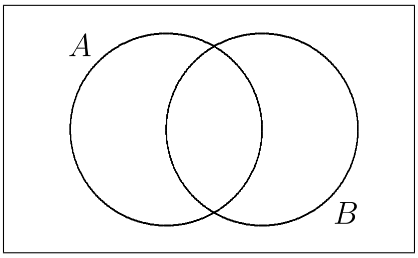
2.1.3 Venn-diagrammit

Joukkoja ja niiden välisten operaatioiden tuloksia havainnollistetaan usein nk. *Venn-diagrammeilla*. Perusjoukkoa kuvataan näissä yleensä suorakulmiolla ja tarkasteltavia joukkoja sen sisällä olevilla ympyröillä tms. rajoitetuilla kuvioilla.

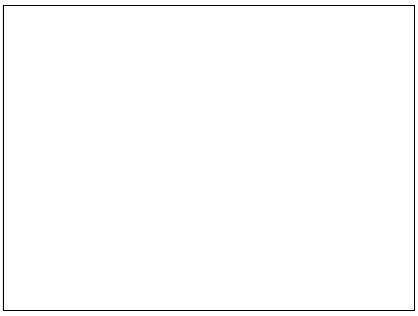
Esimerkki 2.1.9 Seuraavassa Venn-diagrammissa tiheä varjostus havainnollistaa leikkausjoukkoa $A \cap B$ ja harvempi symmetristä erotusta $A \Delta B$:



Tehtävä 2.1.10 Varjosta joukot $\overline{B}$ ja $B \setminus A$ kuviosta



Tehtävä 2.1.11 Piirrä kolmen joukon A, B ja C Venn-diagrammi (niin, että kaikki joukot leikkaavat toisiaan) ja väritä siitä joukot $A \cap (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$ ja $A \cup (B \cap C)$.



2.2 Joukoilla laskeminen

Tässä Luvussa keskitymme joukko-opilliseen ”laskentaan”, muodostamme potenssijoukon ja tulojoukon sekä tutkimme joukkojen alkiomääriä eli *kardinaliteetteja*.

2.2.1 Laskusääntöjä

Venn-diagrammeja käyttäen on helppo havainnollistaa (logiikan säännöistä johdettuja)

Laskusääntöjä 2.2.1 Olkoot A, B, $C \subseteq E$. Tällöin on

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases} \qquad \text{kommutatiivisuus}$$

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases} \qquad \text{assosiatiivisuus}$$

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases} \qquad \text{distributiivisuus}$$

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases} \qquad \text{de Morganin lait}$$

$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = E \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \\ \overline{(\overline{A})} = A \end{cases} \qquad \text{komplementtilait}$$

$$A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A} \qquad \text{kontrapositio}$$

$$A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \subseteq B$$

Esimerkki 2.2.2 Sievennä joukko $\overline{\overline{A} \cup B}$.
Ratkaisu. De Morganin ja komplementtilain mukaan

$$\overline{\overline{A} \cup B} = \overline{(\overline{A})} \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} = A \setminus B.$$

Tehtävä 2.2.3 Olkoot $A := \{1, 3, 5, 8\}$, $B := \{4, 5, 8\}$ ja $C := \{2, 3, 8\}$. Piirrä tilanteesta Venn-diagrammi ja määritä joukot
$(A \setminus (B \cup C)) \cup (A \cap B) =$ ____________________
$\overline{(B \cap C)} \setminus A =$ ____________________

Tehtävä 2.2.4 Esitä Venn-diagrammina Esimerkin 2.1.8 tilanne, kun
a) puhutaan vain eläinlajeista,
b) eläimet käsitetään yksilöiksi.
Varjosta molemmista symmetrinen erotus.

2.2.2 Potenssijoukko

Jokaiseen joukkoon liittyy joukko, johon on koottu sen kaikki osajoukot.

Määritelmä 2.2.5 Joukon A *potenssijoukko* (*power set*) on sen kaikkien osajoukkojen joukko $\mathcal{P}(A)$ eli 2^A.

Esimerkki 2.2.6 Joukon $A := \{1, 2\}$ potenssijoukko

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Tehtävä 2.2.7 Määritä joukon $\{\, x \in \mathbf{R} \mid x^3 - x = 0 \,\}$ alkioiden lukumäärä, potenssijoukko sekä sen alkioiden määrä.

Esimerkki 2.2.8 B:n olympialaisissa Suomen urheilujoukkue sai viisi mitalisijoitusta: MK melonnassa kultaa, SR keihäänheitossa ja joukkue IF, JL, TP jousiammunnassa hopeaa sekä AK uinnissa ja JK nyrkkeilyssä pronssia. Miten ilmaistaisiin mitalisijojen saajat joukko-opillisin merkinnöin?

Ratkaisu. a) Jos halutaan ilmaista mitaleja kaulaansa saaneet urheilijat, valitaan perusjoukoksi E esimerkiksi kaikki olympialaisiin kilpailijoina osallistuneet suomalaiset. Tällöin saadaan ratkaisuksi sen osajoukko

$$\{MK, SR, IF, JL, TP, AK, JK\}.$$

b) Jos taas halutaan pitää jousitrio yhtenäisenä yksikkönä, otetaan perusjoukoksi $E \cup \mathcal{P}(E)$, jolloin

$$\{MK, SR, \{IF, JL, TP\}, AK, JK\}.$$

Pähkinä 2.2.9 *Miksi merkintä 2^A on looginen?*

2.2.3 Karteesinen tulo

Joukko-opillinen tulo on yhtä tai useampaa joukkoa koskeva operaatio, jonka tulos on "moniulotteinen" joukko.

Määritelmä 2.2.10 Ei-tyhjien joukkojen A_1, A_2, …, A_n *tulojoukko* (*product*) eli *karteesinen tulo* on joukko

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_k \ \forall\ k \in [n]\,\}.$$

Sen alkioina ovat kaikki n*-vektorit* eli järjestetyt n-jonot

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

missä $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$.
Kaksi vektoria $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ovat *samat*, jos $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$.

Esimerkki 2.2.11 Jos $A = \{a, b\}$ ja $B = \{1, 2, b\}$, niin

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, b), (b, 1), (b, 2), (b, b)\}.$$

Esimerkki 2.2.12 Euklidisen xy-tason ja yleisemmin kolmiulotteisen xyz-avaruuden pisteitä kuvataan karteesisilla tuloilla

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &= \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{\,(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\,\} \\ \mathbf{R}^3 &= \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{\,(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\,\}. \end{aligned}$$

Tehtävä 2.2.13 Luettele seuraavien joukkojen alkiot:

a) $\{\,(n_1, n_2, n_3) \mid n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1\}\,\} =$ ______________________________

____

b) $\{\,(n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{N}^3 \mid n_1 \in [2], 1 \le n_2 \le n_3 \le 6\,\} =$ ________________

____

2.2.4 Alkiomäärien laskemisesta

Esitetään joitakin äärellisten joukkojen alkiomääriä koskevia laskukaavoja.

Määritelmä 2.2.14 A. Joukot A ja B ovat *pistevieraita* eli *erillisiä* (*disjoint*), jos $A \cap B = \emptyset$.

B. Joukot A_1, A_2, …, A_p ovat *pareittain pistevieraita*, jos $A_k \cap A_l = \emptyset$ kaikilla $k \neq l$.

Lause 2.2.15 Jos A ja B ovat äärellisiä, niin

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

b) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

c) $n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$

Yleisesti, jos A_1, A_2, …, A_p ovat äärellisiä ja $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$, niin pätee nk. *joukkojen yleinen yhteenlaskukaava*

$$\text{d)} \quad n(A) = \sum_{i=1}^{p} n(A_i) - \sum_{i<j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{p-1} n(A_1 \cap \cdots \cap A_p)$$

ja karteesiselle tulolle pätee

$$\text{e)} \quad n(A_1 \times \cdots \times A_p) = n(A_1) \cdots n(A_p)$$

Jos joukot ovat lisäksi pareittain pistevieraita, on

$$\text{f)} \quad n\Big(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{p} n(A_i)$$

Tehtävä 2.2.16 Esitä yleisen yhteenlaskukaavan avulla $n(A \cup B \cup C)$.

Esimerkki 2.2.17 Kuinka monessa luvuista

$$1000, 1001, \ldots, 9999$$

on (vähintäin) kaksi samaa numeroa peräkkäin?

Eräs ratkaisu. Tulkitaan nelinumeroiset luvut järjestetyiksi nelikoiksi ja merkitään

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_1 = n_2, n_1 \neq 0 \}, \\ A_2 &= \{ (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_2 = n_3, n_1 \neq 0 \}, \\ A_3 &= \{ (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_3 = n_4, n_1 \neq 0 \}. \end{aligned}$$

On siis laskettava $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Tuloperiaatteen mukaan

$$\begin{aligned}
n(A_1) &= n(A_2) = n(A_3) = 9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 900, \\
n(A_1 \cap A_2) &= n(A_1 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_3) = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = 90, \\
n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 9,
\end{aligned}$$

joten yleisen yhteenlaskukaavan nojalla

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot 900 - 3 \cdot 90 + 9 = 2439.$$

Tehtävä 2.2.18 Olkoot

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ja } B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Määritä joukon $(A \setminus B) \times (A \cup B)$ osajoukkojen määrä. ________________
Vihje: Laske suoraan erotuksen ja yhdisteen alkiomäärät ja käytä sitten Lauseen 2.2.15 kaavoja b) ja c).

3 RELAATIOT JA FUNKTIOT

Tässä Luvussa tarkastellaan tulojoukkojen osajoukkoja, *relaatioita*, erikoistapauksena jo koulusta tuttuja *funktioita* (mutta nyt täsmällisesti!), ja muutamia muita hyödyllisiä relaatiotyyppejä.

3.1 Relaatio

3.1.1 Relaation määritelmä

Määritelmä 3.1.1 Olkoot $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ epätyhjiä joukkoja.

a) Tulojoukon
$$\mathbf{X}\times\mathbf{Y} = \{\,(x,y) \mid x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\,\}$$
osajoukkoja sanotaan *relaatioiksi* joukkojen $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ *välillä*.

b) Jos $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, voidaan myös sanoa, että R on relaatio *lähtöjoukosta* $\mathbf{X}$ *maalijoukkoon* $\mathbf{Y}$.

Merkintä xRy tarkoittaa, että $(x,y) \in R$.

c) Jos $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ eli $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$, niin R on *relaatio joukossa* $\mathbf{X}$.

Esimerkki 3.1.2 Olkoot
$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \{\,1,2,3,4,5,6\,\}\\ \mathbf{Y} &= \{\,\text{Pekka},\text{Visa},\text{Martti},\text{Janne}\,\}\end{aligned}$$

Silloin esimerkiksi joukolla
$$\{\,(1,\text{Janne}),(2,\text{Martti}),(3,\text{Pekka}),(4,\text{Visa})\,\}$$
voi olla vaikkapa nimien aakkostusmerkitys, mutta yhtä hyvin se voisi merkitä paremmuusjärjestystä jossain kilpailussa.

Tehtävä 3.1.3 Keksi merkityksiä Esimerkin 3.1.2 joukkojen välisille relaatioille

a) $\{\,(1,\text{Pekka}),(1,\text{Martti}),(3,\text{Visa})\,\}$ ______________________

b) $\{\,(\text{Visa},4),(\text{Janne},2)\,\}$ ______________________________

Tehtävä 3.1.4 Jos Esimerkissä 3.1.2 kyse onkin nopanheitosta, jossa Martti ja Pekka saavat nelosen, Janne viitosen ja Visa kakkosen, niin mitenkä merkitset tuloksen relaationa?

$$R = \{\,(\quad,\quad),(\quad,\quad),\qquad\qquad\qquad\}$$

Esimerkki 3.1.5 Olkoot edelleen

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \{\,1,2,3,4,5,6\,\}\\ \mathbf{Y} &= \{\,\text{Pekka},\text{Visa},\text{Martti},\text{Janne}\,\}\end{aligned}$$

ja kuvatkoon

$$J = \{\,(2,\text{Janne}),(2,\text{Martti}),(1,\text{Pekka}),(4,\text{Visa})\,\}$$

järjestystä eräässä kilpailussa, jonka siis Pekka voitti, Jannen ja Martin tullessa jaetulle hopealle. Sija siis näkyy parien ensimmäisestä jäsenestä, ja relaatio ilmaisee henkilöiden sijoituksen. Näin on saatu alkeellinen ”tietokanta”, jossa mekaaniset tietohaut voidaan tehdä kumman jäsenen avulla tahansa, tarkoituksesta riippuen.

Määritelmä 3.1.6 Relaatioon $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ liittyy seuraavia käsitteitä:

a) joukon $B \subseteq \mathbf{Y}$ *alkukuvajoukko* (preimage)

$$R^{-1}(B) := \{\,x \in \mathbf{X} \mid (x,y) \in R \text{ jollakin } y \in B\,\},$$

b) *määrittelyjoukko* $R^{-1}(\mathbf{Y})$ (domain), ja

c) joukon $A \subseteq \mathbf{X}$ *kuvajoukko* (image)

$$R(A) := \{\,y \in \mathbf{Y} \mid (x,y) \in R \text{ jollakin } x \in A\,\}.$$

d) Erikoisesti *arvojoukko* (range) on koko lähtöjoukon kuvajoukko $R(\mathbf{X})$.

e) Yhden alkion alkukuvaa merkitään lyhyesti $R^{-1}(y) := R^{-1}(\{y\})$ ja kuvaa $R(x) := R(\{x\})$.

Samoin, jos kuvajoukko tai alkukuvajoukko sisältää *tasan yhden alkion*, jätetään niistä usein joukon sulut pois, ts. *samaistetaan* $\{\,a\,\} \simeq a$.

Esimerkki 3.1.7 Esimerkissä 3.1.5 voidaan kuvajoukon tai alkukuvajoukon avulla hakea tietyille sijoille päässeet tai henkilöiden sijoitukset, esimerkiksi

$$\begin{aligned}J(4) &= J(\{\,4\,\}) = \{\,\text{Visa}\,\}\\ J(2) &= \{\,\text{Janne},\text{Martti}\,\}\\ J(\{\,1,5\,\}) &= \{\,\text{Pekka}\,\}\\ J^{-1}(\text{Janne}) &= 2\\ J^{-1}(\text{Visa}) &= \{\,4\,\} \simeq \_\_\\ J^{-1}(\{\,\text{Pekka},\text{Martti}\,\}) &= \{\,1,2\,\}\end{aligned}$$

Tehtävä 3.1.8 Mitä ovat Esimerkkien 3.1.5 ja 3.1.7 tilanteissa

a) $J(1) =$ ______

b) $J(3) =$ ______

c) $J(\{ 2, 4, 6 \}) =$ ______

d) $J^{-1}(\text{Martti}) =$ ______

e) $J(J^{-1}(\text{Martti})) =$ ______

Määritelmä 3.1.9 Epätyhjän joukon $\mathbf{X}$ *yksikkö-* eli *identtisyysrelaatio* on *diagonaali*

$$\Delta_{\mathbf{X}} := \{ (x, x) \mid x \in \mathbf{X} \}.$$

Yksikkörelaatio koostuu siis kaikista mahdollisista joukon $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ pareista (x, x).

Tehtävä 3.1.10 Olkoon $\mathbf{X} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Määritä $\Delta_{\mathbf{X}}$: ______

3.1.2 Relaation havainnollistaminen

Äärellisten joukkojen välisiä relaatioita havainnollistetaan usein erilaisilla *(nuoli)kaavioilla.*
Jos $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$, asetetaan yleensä $\mathbf{X}$ vasemmalle, $\mathbf{Y}$ oikealle ja yhdistetään relaatiossa olevat alkiot janalla (tai nuolella) (ks. Tehtävä 3.1.11).
Jos $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ eli kyseessä on relaatio joukossa $\mathbf{X}$, voidaan alkiot piirtää myös esimerkiksi ympyrän kehälle ja ilmaista relaatio nuolilla (ks. Tehtävä 3.1.12).
Relaatioita voidaan esittää myös tuttuun tapaan koordinaatistossa kuten reaalifunktioita, ks. Luku 3.2. Esimerkiksi lähtöjoukon alkiot voidaan asettaa xy-tason x-akselille ja maalijoukon alkiot y-akselille, jolloin $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ on suorakulmion muotoisessa tasojoukossa vastinalkioiden kohdalla ja relaatio on jokin tämän osajoukko (ks. Tehtävä 3.1.11).

Tehtävä 3.1.11 Olkoot

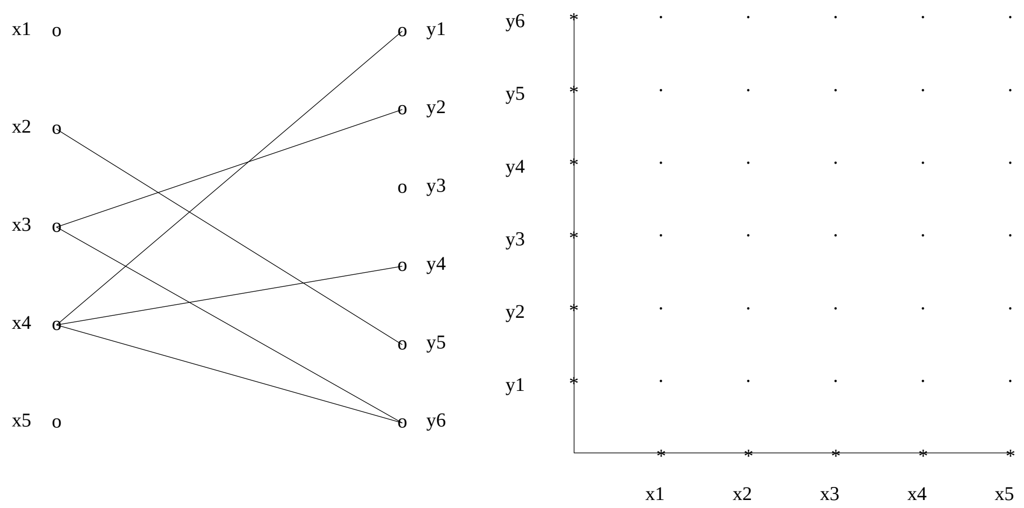
$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ \mathbf{Y} &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\} \end{aligned}$$

Kuvan 1 vasemmassa kuviossa on esitetty eräs relaatio $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$.

a) Esitä relaatio luettelomuodossa: ______

Lähtöjoukko on ______

Kuvajoukko on ______



Kuva 1: Kuvio Tehtävään 3.1.11

d) Olkoot $A := \{x_1, x_2, x_4\}$ ja $B := \{y_2, y_3, y_6\}$.

Joukon A kuva $R(A)$ on ______________________________

Joukon B alkukuva $R^{-1}(B)$ on __________________________

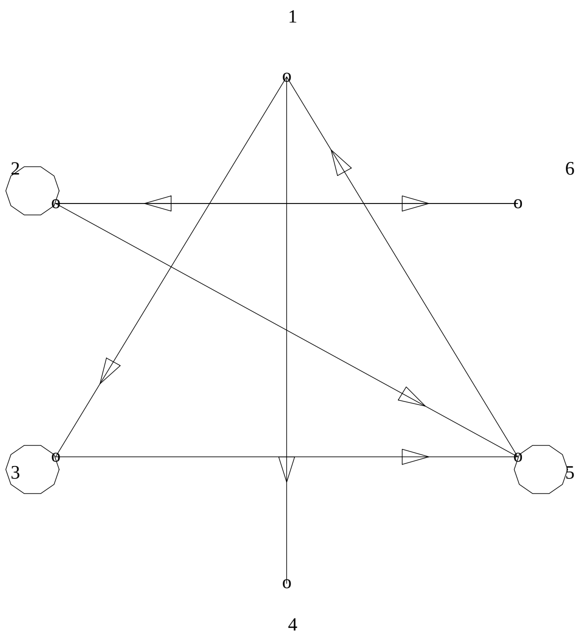
Kuva $R(R^{-1}(B))$ on ________________________________

e) Oikeanpuoleiseen kuvioon on jo piirretty $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ pisteinä. Piirrä siihen R rinkuloimalla tarvittavat pisteet.

Tehtävä 3.1.12 Esitä Kuvan 2 relaatio $S \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$

a) luettelomuodossa ______________________________________

b) Tehtävässä 3.1.11 esitetyillä tavoilla piirtäen.



Kuva 2: Kuvio Tehtävään 3.1.12

3.1.3 Relaatioiden yhdistäminen ja käänteisrelaatio

Määritelmä 3.1.13 Relaation $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ *käänteisrelaatio* (*inverse*) on joukon $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ osajoukko

$$R^{-1} := \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \},$$

siis pareissa jäsenten järjestys vaihdetaan.

Tehtävä 3.1.14 Esitä Kuvan 2 relaation $S \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ käänteisrelaatio S^{-1}

a) luettelomuodossa ________________________________

b) Tehtävässä 3.1.11 esitetyillä tavoilla piirtäen.

Määritelmä 3.1.15 Kahden relaation $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ ja $S \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ *tulo* (eli *yhdistelmä, kompositio*) on relaatio

$$S \circ R = \{ (x, z) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Z} \mid \exists\, y \in \mathbf{Y} \text{ jolle } xRy \text{ ja } ySz \}.$$

Huomautus 3.1.16 a) Jos $R \subseteq \mathbf{X}{\times}\mathbf{Y}$, niin

$$R^{-1}{\circ}R \subseteq \mathbf{X}{\times}\mathbf{X} \quad \text{ja} \quad R{\circ}R^{-1} \subseteq \mathbf{Y}{\times}\mathbf{Y}.$$

b) Yksikkörelaatio $\Delta_{\mathbf{X}}$ on tulon nk. *neutraalialkio*, nimittäin jokaiselle $R \subseteq \mathbf{X}{\times}\mathbf{X}$ on

$$\Delta_{\mathbf{X}}{\circ}R = R{\circ}\Delta_{\mathbf{X}} = R.$$

Tehtävä 3.1.17 Olkoot $\mathbf{X} := \{1,2,3\}$, $\mathbf{Y} := \{a,b,c\}$ ja $\mathbf{Z} := \{\alpha,\beta\}$. Piirrä nuolet, jotka kuvaavat relaatioita

$$\begin{aligned} R &= \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,a)\} \\ S &= \{(b,\alpha),(c,\alpha),(c,\beta)\} \end{aligned}$$

ja relaatioita $S{\circ}R$ sekä R^{-1}:

$\mathbf{X}$	$\longrightarrow$	$\mathbf{Y}$	$\longrightarrow$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{X}$	$\longrightarrow$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Y}$	$\longrightarrow$	$\mathbf{X}$
	R		S			$S \circ R$			R^{-1}	
1	$\longrightarrow$	a			1			a		1
				α			α			
2		b			2			b		2
				β			β			
3		c			3			c		3

Lause 3.1.18 Jos $R \subseteq \mathbf{X}{\times}\mathbf{Y}$, $S \subseteq \mathbf{Y}{\times}\mathbf{Z}$ ja $T \subseteq \mathbf{Z}{\times}\mathbf{V}$, niin

$$\begin{aligned} (S{\circ}R)^{-1} &= R^{-1}{\circ}S^{-1} \\ (T{\circ}S){\circ}R &= T{\circ}(S{\circ}R) \end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan malliksi ensimmäinen väite. Selvästi relaatiot ovat saman tulojoukon osajoukkoja: $(S{\circ}R)^{-1} \subseteq \mathbf{Z}{\times}\mathbf{X}$ ja $R^{-1}{\circ}S^{-1} \subseteq \mathbf{Z}{\times}\mathbf{X}$. Relaatiot ovat samat, sillä

$$\begin{aligned} (z,x) \in (S \circ R)^{-1} &\iff z(S \circ R)^{-1}x \\ &\iff x(S \circ R)z \\ &\iff \text{jollekin } y \in \mathbf{Y}\text{: } xRy \text{ ja } ySz \\ &\iff \text{jollekin } y \in \mathbf{Y}\text{: } yR^{-1}x \text{ ja } zS^{-1}y \\ &\iff \text{jollekin } y \in \mathbf{Y}\text{: } zS^{-1}y \text{ ja } yR^{-1}x \\ &\iff z(R^{-1} \circ S^{-1})x \\ &\iff (z,x) \in (R^{-1} \circ S^{-1}). \end{aligned}$$

Q.E.D

Huomautus 3.1.19 a) Relaatioiden tulo ei ole vaihdannainen, mutta on Lauseen 3.1.18 mukaan liitännäinen, joten voidaan merkitä

$$T\circ S\circ R := (T\circ S)\circ R = T\circ(S\circ R).$$

b) Tulon kääntaminen yleisemmin:

$$(T\circ S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}\circ T^{-1}.$$

3.2 Funktio

Relaatioista tärkein erikoistapaus lienee *kuvaus* eli *funktio*.

3.2.1 Funktio relaationa

Määritelmä 3.2.1 Relaatio $F \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ on *kuvaus* eli *funktio* (*function, mapping*), jos seuraavat kaksi ehtoa ovat täytetyt:

1) Jokaista $x \in \mathbf{X}$ vastaa $y \in \mathbf{Y}$ siten, että xFy.
2) Jos xFy ja xFz, niin $y = z$.

Funktiolle käytetään tietenkin kaikkia relaatioista tuttuja nimityksiä, ks. Määritelmä 3.1.1. Palautetaan mieleen myös funktioiden yhteydessä käytetyt erikoismerkinnät ja -nimitykset (opittu koulussa!?):

- $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ tarkoittaa $F \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$
- $F(x) = y$ tarkoittaa xFy
- F on *injektio* (*one-to-one*), jos $F(x_1) = F(x_2)$ vain, kun $x_1 = x_2$
- F on *surjektio* (*onto*), jos $F(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$
- F on *bijektio*, jos se on injektio ja surjektio
- käänteisrelaatio F^{-1} on *käänteiskuvaus* (*inverse*), mikäli se on kuvaus.

Esimerkki 3.2.2 Valitaan $\mathbf{X}$ = naiset ja $\mathbf{Y}$ = miehet. Silloin joukko

$$R = \{ (N, M) \mid N \text{ ja } M \text{ olleet joskus aviossa} \}$$

on relaatio joukossa $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Se ei ole kuvaus. Miksi?

Tehtävä 3.2.3 Olkoon $\mathbf{J}$ kaikkien Suomen järvien joukko ja $\mathbf{N}_J$ kaikkien järvennimien joukko. Määritellään relaatio $R \subseteq \mathbf{J} \times \mathbf{N}_J$ säännöllä

$$jRn \iff \text{järvellä } j \text{ on nimi } n.$$

Pidätkö relaatiota R kuvauksena? ____ Injektiona? ____ Surjektiona? ____
Mikä on määrittelyjoukko? __________, mikä arvojoukko? __________

Esimerkki 3.2.4 Tarkastellaan Esimerkin 2.2.8 kohdan a) tilannetta. Olkoot

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{suomalaisten kilpailijoiden joukko}, \\ \mathbf{P} &= \{\, k(ulta), h(opea), p(ronssi)\,\}, \\ F &= \{\,(MK,k),(SR,h),(IF,h),(JL,h),(TP,h),(AK,p),(JK,p)\,\}. \end{aligned}$$

a) Relaatio $F \subseteq \mathbf{K}\times\mathbf{P}$ ei ole kuvaus, sillä kaikille ei liiennyt mitaleja.
b) Jos $\mathbf{M}$ on suomalaisten mitalimiesten joukko, niin $F \subseteq \mathbf{M}\times\mathbf{P}$ on kuvaus. Se on surjektio, mutta ei injektio.
Käänteisrelaatio $F^{-1} \subseteq \mathbf{P}\times\mathbf{M}$ ei ole kuvaus.

Kuvausten yhdistäminen on erikoistapaus relaatioiden yhdistämisestä. Käänteisrelaatio ei yleensä toteuta käänteisfunktiolta vaadittavia ehtoja

$$R\circ R^{-1} = R^{-1}\circ R = \Delta_{\mathbf{X}}.$$

Esimerkki 3.2.5 Ympyrän muodostava relaatio

$$Y := \{\,(x,y) \mid x^2+y^2=1\,\} \subseteq [-1,1]\times[-1,1]$$

ei ole kuvaus, sillä esimerkiksi $(0,-1)$ ja $(0,1) \in Y$. Tämä näkyy myös muodosta $y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$, josta y ei määräydy yksikäsitteisesti.
Puoliympyrä $\{\,(x,y) \mid x^2+y^2=1, y \geq 0\,\} \subseteq [-1,1]\times[0,1]$ on kuvaus, surjektio, mutta ei injektio.
Positiivisessa neljänneksessä $x, y \geq 0$ ympyrä on bijektio. Miten se ilmaistaan funktiomerkinnöin ja mikä on sen käänteiskuvaus?

Tehtävä 3.2.6 Esitä relaationa kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^2$. Piirrä kuvio. Miten täytyy lähtöjoukko ja maalijoukko valita, että f on bijektio?

Tehtävä 3.2.7 Millainen on relaatio, joka ei ole kuvaus, mutta jonka käänteisrelaatio on kuvaus ja jopa surjektio?

3.2.2 Laatikkoperiaate

Määritelmä 3.2.8 Joukko $\mathbf{X} \neq \emptyset$ on *aidosti mahtavampi* kuin $\mathbf{Y}$, jos ei ole olemassa injektiota $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Jos joukot ovat äärellisiä, niin aidosti mahtavammassa on konkreettisesti enemmän alkioita, eli $n(\mathbf{X}) > n(\mathbf{Y})$.

Seuraava tuttu ilmiö, nk. *laatikko-* eli *kyyhkyslakkaperiaate* (*pigeon hole principle*):

> *On käytettävissä m laatikkoa. Jos $n > m$ kappaletta palloja asetetaan noihin laatikoihin, on ainakin yhdessä vähintäin 2 palloa.*

on matematiikan kielellä ilmaistuna

Lause 3.2.9 (laatikkoperiaate). Olkoot $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ äärellisiä joukkoja, joille $n(\mathbf{X}) > n(\mathbf{Y})$. Jos $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ on kuvaus, on joukossa $\mathbf{X}$ pistepari $x_1 \neq x_2$, jolle $f(x_1) = f(x_2)$.

Todistus. Koska $\mathbf{X}$ on mahtavampi kuin $\mathbf{Y}$, f ei voi olla injektio, joten on olemassa $x_1 \neq x_2$, joille $f(x_1) = f(x_2)$. Q.E.D

Esimerkki 3.2.10 Oletetaan, että maapallolla on 200 pääkaupunkia (joukko $\mathbf{X}$). Olkoot näiden lämpötilat eräällä hetkellä välillä $[-40°, +40°]$ (joukko $\mathbf{Y}$). Laatikkoperiaatteen mukaan kuvaus $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$,

$$f(\text{pääkaupunki}) := \text{ lämpötila kyseisessä kaupungissa},$$

saa saman arvon ainakin kahdessa kaupungissa.

Tehtävä 3.2.11 Kurssin osallistujaluettelosta arvotaan n opiskelijaa. Kuinka suuri n tarvitaan, jotta arvottujen joukossa on varmasti ainakin kaksi, joilla on syntymäpäivä samassa kuussa?

Tehtävä 3.2.12 Kuinka monta pitää arpoa, jotta saadaan kaksi opiskelijaa, jotka ovat
a) syntyneet samana viikonpäivänä?
b) samanikäisiä?

Lauseen 2.4.1 vahvennus, nk. *yleistetty laatikkoperiaate* todistettaisiin summaperiaatteen (Lause 2.2.15 kohta f) avulla.

Lause 3.2.13 (yleistetty laatikkoperiaate). Olkoot joukot $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ äärellisiä ja $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ kuvaus. Silloin:

$$\text{Jos } n(\mathbf{X}) > k{\cdot}n(\mathbf{Y}), \text{ niin } n(f^{-1}(y)) > k \text{ jollakin } y \in \mathbf{Y}.$$

Esimerkki 3.2.14 Yleistetyn laatikkoperiaatteen nojalla ainakin 3 kaupungissa on sama lämpötila, sillä $k = 2$ on suurin luku, jolle

$$n(\mathbf{X}) = 200 > k \cdot 81 = k \cdot n(\mathbf{Y}).$$

Esimerkki 3.2.15 Aritmeettinen muotoilu yleistetylle laatikkoperiaatteelle: Jos $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbf{N}_0$ ja

$$\frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}{m} > k,$$

ainakin yksi luvuista $n_j > k$, ts. kaikki luvut eivät voi olla aidosti pienempiä kuin niiden keskiarvo.

Esimerkki 3.2.16 Kaksikymmentä markan rahaa on jaettu kahdeksaan pinoon, kussakin vähintäin yksi markka. Osoita, että ainakin yksi pinoista sisältää enintään kaksi markkaa.

Ratkaisu. Ainakin yksi yhden tai kahden markan pino esiintyy, koska muutoin kaikissa olisi vähintäin kolme ja summa olisi ainakin $8 \cdot 3 = 24 > 20$.

Tehtävä 3.2.17 Osoita, että aina voidaan valita pinot, joissa on yhteensä neljä markkaa.

Vihje. Osoita, että jokin seuraavista varmasti esiintyy:
1. neljä yhden markan pinoa
2. kaksi yhden markan ja yksi kahden markan pino
3. yksi yhden ja yksi kolmen markan pino
4. kaksi kahden markan pinoa.

3.3 Muita relaatiotyyppejä

Tärkeitä *yhden joukon sisäisiä* relaatiotyyppejä ovat *ekvivalenssirelaatio*, jolla luokitellaan joukon alkiot jonkin ominaisuuden perusteella, ja *järjestysrelaatio*, joka kuvaa alkioiden välistä hierarkiaa. Nämä erottuvat toisistaan seuraavien alkeisominaisuuksien perusteella.

Määritelmä 3.3.1 Relaatio $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ on

a) *refleksiivinen*, jos xRx jokaiselle $x \in \mathbf{X}$.

b) *symmetrinen*, jos kaikilla $x, y \in \mathbf{X}$ pätee

$$xRy \quad \Rightarrow \quad yRx.$$

c) *antisymmetrinen*, jos kaikilla $x, y \in \mathbf{X}$ pätee

$$xRy \ \wedge \ yRx \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

d) *transitiivinen*, jos kaikilla $x, y, z \in \mathbf{X}$ pätee

$$xRy \ \wedge \ yRz \quad \Rightarrow \quad xRz.$$

e) *täysi*, jos kaikilla $x, y \in \mathbf{X}$ pätee xRy tai yRx.

Esimerkki 3.3.2 Olkoot $\mathbf{X} = \{ a, b, c, d, e \}$ eri alkioita ja

$$R = \{ (a, a), (a, b), (a, e), (b, a), (b, b), (b, e), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d) \}.$$

Mitkä edellisistä Määritelmän 3.3.1 ominaisuuksista on relaatiolla R?

Ratkaisu. R ei ole
- refleksiivinen, sillä $e \not R e$,
- symmetrinen, sillä bRe, mutta $e \not R b$,
- antisymmetrinen, sillä aRb ja bRa, mutta $a \neq b$, - täysi, sillä esimerkiksi $b \not R c$.
Sen sijaan R on transitiivinen. Tämä nähdään käymällä läpi kaikki parit xRy, yRz ja toteamalla, että aina xRz.

3.3.1 Ekvivalenssirelaatio ja ositus

Määritelmä 3.3.3 Relaatio $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ on *ekvivalenssi(relaatio)*, jos se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen (ks. Määritelmä 3.3.1).

Ekvivalenssi jakaa joukon $\mathbf{X}$ pistevieraisiin *ekvivalenssiluokkiin* X_k, joiden yhdiste on koko $\mathbf{X}$. Ekvivalenssiluokkiin jakoa sanotaan joukon $\mathbf{X}$ *osituksekseksi* (*partition*).
Yhden ekvivalenssiluokan alkiot ovat *tämän relaation suhteen samanarvoisia*.
Kuvajoukkoa $R(x)$ sanotaan alkion $x \in \mathbf{X}$ *määräämäksi ekvivalenssiluokaksi*.

Esimerkki 3.3.4 Ihmisten joukko jakaantuu samannimisten ihmisten muodostamiin ekvivalenssiluokkiin, kun relaationa on

$$H_1RH_2 \iff H_1 \text{ ja } H_2 \text{ samannimisiä.}$$

Jotkut ekvivalenssiluokat voivat sisältää vain yhden ihmisen, kun taas esimerkiksi Matti Virtasia on paljon.

Esimerkki 3.3.5 Määritellään joukossa $\mathbf{Z}$ relaatio

$$mRn \quad \iff \quad m-n \text{ on jaollinen luvulla 3.}$$

Tämä on ekvivalenssi, sillä se on

- refleksiivinen: jokaisella $n \in \mathbf{Z}$ on $n-n = 0$ jaollinen kolmella eli nRn,
- symmetrinen: jos mRn, on $m-n = 3k$ eli $n-m = 3(-k)$ ja siten nRm,
- transitiivinen: olkoot lRm ja mRn eli $l-m = 3p$ ja $m-n = 3q$. Silloin

  $$l-n = (l-m) + (m-n) = 3p+3q = 3(p+q),$$

  joten lRn.

Ekvivalenssiluokkia on kolme, nimittäin

$$\begin{aligned} R(0) &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\} \\ R(1) &= \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\} \\ R(2) &= \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\} \end{aligned}$$

ovat erillisiä ja sisältävät koko joukon $\mathbf{Z}$.

3.3.2 Osittainen ja täydellinen järjestysrelaatio

Määritelmä 3.3.6 Relaatio $\preceq \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ on

a) *osittainen järjestys* (*partial order*), jos se on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen,

b) *totaali järjestys*, jos se on täysi osittainen järjestys.

Pari $(\mathbf{X}, \preceq)$ on

a') *osittain järjestetty joukko*, jos $\preceq$ on osittainen järjestys joukossa $\mathbf{X}$.

b') *totaalisti järjestetty joukko*, jos $\preceq$ on totaali järjestys joukossa $\mathbf{X}$.

Merkintä: Jos $\preceq$ on osittainen järjestys, sanonta *aito pienemmyys* tarkoittaa relaatiota $\prec$:

$$x \prec y \iff x \preceq y \text{ ja } x \neq y.$$

Se ei ole refleksiivinen, mutta on antisymmetrinen (!) ja transitiivinen. Joukon osittainen järjestys *indusoi* osajoukkoihin osittaisen järjestyksen, joka voi olla jopa totaali.

Esimerkki 3.3.7 $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$ ja $\mathbf{N}$ varustettuina tavallisella $\leq$ relaatiolla ovat totaalisti järjestettyjä.

Esimerkki 3.3.8 Inkluusio $\subseteq$ on osittainen järjestys potenssijoukossa $\mathcal{P}(\mathbf{X})$. Se ei ole totaali, jos $n(\mathbf{X}) \geq 2$.

Esimerkki 3.3.9 Varustetaan välillä $I := [-1, 1]$ jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden joukko $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ pisteittäisellä järjestyksellä

$$f \preceq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Pari $(\mathcal{C}(I, \mathbf{R}), \preceq)$ on silloin osittainen järjestys, mutta ei totaali järjestys.

Määritelmä 3.3.10 Olkoon $(\mathbf{X}, \preceq)$ järjestetty joukko ja $x, y \in \mathbf{X}$, joille $x \prec y$. Alkio x on alkion y *välitön edeltäjä* ja y alkion x *välitön seuraaja*, jos näiden "välissä" ei ole alkioita, ts. $x \preceq z \preceq y \;\Rightarrow\; z = x \vee z = y$.

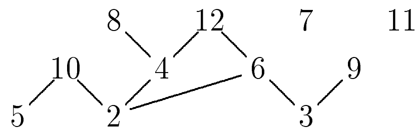
Määritelmä 3.3.11 Järjestetyn joukon $(\mathbf{X}, \preceq)$ alkio $a \in \mathbf{X}$ on

- *minimaalinen*, jos $x \preceq a \;\Rightarrow\; x = a$.
- *maksimaalinen*, jos $a \preceq x \;\Rightarrow\; x = a$.
- joukon $\mathbf{X}$ *pienin alkio*, jos $a \preceq x$ kaikilla $x \in \mathbf{X}$.
- joukon $\mathbf{X}$ *suurin alkio*, jos $x \preceq a$ kaikilla $x \in \mathbf{X}$.

3.3.3 Hassen kaavio

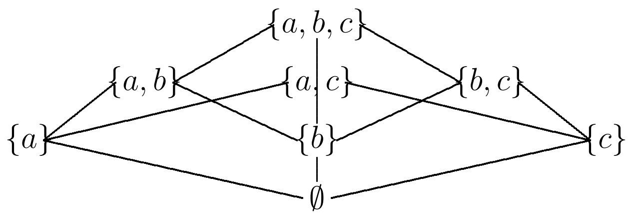
Osittain järjestetty joukko $(\mathbf{X}, \preceq)$ kannattaa esittää yksinkertaistettuna *Hassen kaaviona*, jossa alkiosta piirretään nuolet ylöspäin vain sen välittömiin seuraajiin. Hassen kaaviota luetaan "transitiivisesti".

Esimerkki 3.3.12 Olkoon $\mathbf{X} := \{2, 3, \ldots, 12\}$ ja $x \preceq y$ jos ja vain jos $y = x \cdot z$ jollekin $z \in \mathbf{Z}$. Parin $(\mathbf{X}, \preceq)$ Hassen kaavio on



Kaavion mukaan esimerkiksi $2 \preceq (4 \preceq)\ 8$, minimaalisia alkioita ovat 5, 2, 3, 7 ja 11 ja maksimaalisia 10, 8, 12, 7, 9 ja 11. Pienintä tai suurinta alkiota ei ole.

Tehtävä 3.3.13 Etsi parin $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ Hassen kaaviosta minimaaliset, maksimaaliset, pienin ja suurin alkio sekä alkioiden välittömät seuraajat:



3.4 Relaation sulkeuma

Olkoon $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ relaatio.
tietyn ehdon $\mathcal{E}$ täyttävistä relaatioista *suppein*, ts. relaatio $R_{\mathcal{E}} \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$, jolle
1) $R \subseteq R_{\mathcal{E}}$,
2) $R_{\mathcal{E}}$ toteuttaa ehdon $\mathcal{E}$,
3) jos $S \supseteq R$ toteuttaa ehdon $\mathcal{E}$, niin $R_{\mathcal{E}} \subseteq S$.
Ongelmalla ei aina ole ratkaisua. Ratkaisu on olemassa (ja se on samalla yksikäsitteinen) jos ja vain jos joukko

$$\tilde{R}_{\mathcal{E}} := \cap \{ T \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X} \mid R \subseteq T,\ T \text{ toteuttaa ehdon } \mathcal{E} \}$$

on epätyhjä ja toteuttaa ehdon $\mathcal{E}$. Ratkaisua sanotaan vaikkapa *$\mathcal{E}$-sulkeumaksi* (*closure*).

3.4.1 Transitiivinen sulkeuma

Teoreettisesti voidaan todistaa, että jos ehto $\mathcal{E}$ on *transitiivisuus*, ratkaisu – *transitiivinen sulkeuma* R_t – on olemassa. Todistus voidaan tehdä seuraavin – matematiikassa usein samankaltaisena esiintyvin – askelin:

1. Osoitetaan, että mikä tahansa (samassa joukossa $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ määriteltyjen) transitiivisten relaatioiden leikkaus on transitiivinen.

2. Todetaan, että $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ on itse transitiivinen relaatio ja varmasti sisältää annetun relaation R.

3. Muodostetaan kaikkien relaation R sisältävien transitiivisten relaatioiden leikkaus $\tilde{R}_t$.

Kohdan 2 mukaan tämä on epätyhjä, kohdan 1 mukaan transitiivinen ja määrittelynsä mukaan $\tilde{R}_t = R_t$.
Tämä todistus ei anna *käytännöllistä keinoa* transitiivisen sulkeuman *laskemiseksi*, siinähän pitäisi muodostaa ensin suuri määrä ”turhia”, mahdollisesti hyvinkin laajoja transitiivisia relaatioita. Yksinkertaisissa tapauksissa transitiivinen sulkeuma selviää, kun lisätään relaatioon R – vaikkapa kaaviosta katsoen – riittävästi alkioita, joita ilman se ei ole transitiivinen. Prosessi voidaan tehdä systemaattisesti riittävän monessa vaiheessa.

Esimerkki 3.4.1 a) Relaatioon $\{(a,b),(b,c),(c,b)\}$ on lisättävä (a,c), (b,b) ja (c,c), jotta saadaan sen transitiivinen sulkeuma. Piirrä kuviot.
b) Lisätään relaatioon $S = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$ aluksi (a,c) ja (b,d). Havaitaan, että syntynyt relaatio ei vielä ole transitiivinen, joten lisätään ”toisella kierroksella” (a,d). Nyt ei enää lisää tarvita. Piirrä kuviot.

Äärellisessä joukossa $\mathbf{X}$ määritellyn relaation R transitiivinen sulkeuma saadaan aina yhdistelemällä nuolilla alkiot, joita yhdistää kahden nuolen, kolmen nuolen, neljän nuolen jne. pituiset nuolijonot. Matemaattisesti se käy seuraavasti:

Määritelmä 3.4.2 Relaation $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ *n. potenssi* R^n määritellään rekursiokaavalla

1) $R^0 := \Delta_{\mathbf{X}}$

2) $R^{n+1} := R^n \circ R$ arvoilla $n \in \mathbf{N}_0$.

Lause 3.4.3 Olkoon $R \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ ja $n(\mathbf{X}) = m$. Silloin relaation transitiivinen sulkeuma on

$$R_t = \bigcup_{k=1}^{m} R^k.$$

Tehtävä 3.4.4 Olkoot $\mathbf{X} = \{\, a, b, c, d, e \,\}$ eri alkioita ja

$$R = \{\, (a,a), (a,b), (a,e), (b,a), (b,b), (b,e), (c,b), (c,c), (c,d), (d,c), (d,d) \,\}.$$

Laske R_t. ____

3.4.2 Ekvivalenssisulkeuma

Jos R on relaatio joukossa $\mathbf{X}$, niin on myös olemassa suppein relaation R sisältävä ekvivalenssi. Tämä voidaan perustella samoin kuin transitiivisenkin sulkeuman olemassaolo. Ekvivalenssisulkeuma antaa periaatteessa keinon luokitella alkioita lähtien vajavaisistakin esitiedoista.

Tehtävä 3.4.5 Joukon $\mathbf{X} = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \,\}$ relaatio

$$R = \{\, (1,3), (2,3), (4,6), (5,1), (6,6) \,\}$$

ei ole ekvivalenssi. Täydennä se suppeimmaksi relaation R sisältäväksi ekvivalenssiksi.

$\overline{R}_e =$ ____

4 VERKOISTA

Tässä Luvussa tutkimme matemaattisia rakenteita, joilla on hyvin keskeinen merkitys nykyelämässä, vaikka itse infrastruktuuri onkin usein piilossa. Perinteisiä *verkkojen* sovellusalueita ovat olleet mm. tiestön ja vesistön, puhelin- ja sähköverkkojen sekä putkistojen mallitus. Uudempia verkkoina esitettävissä olevia struktuureja ovat esimerkiksi integroidut piirit ja mikroprosessorit, tietokoneohjelman vuokaaviot, yrityksen henkilöstöstruktuurit, tietopankit, internet ja talouselämän rakenne.

4.1 Mitä matemaattiset verkot ovat?

Verkko eli *graafi* koostuu pisteistä eli *solmuista* ja näitä mahdollisesti yhdistävistä *kaarista* tai suunnatuista kaarista eli *nuolista*.

- *Suuntaamaton verkko* soveltuu sellaisten struktuurien malliksi, joissa materia tai informaatio voi liikkua kahta kohdetta yhdistävässä välineessä kumpaan suuntaan tahansa.
- *Suunnattua verkkoa* käytetään mallina struktuureissa, joissa liikenne kahden solmun välillä saattaa olla yksisuuntaista.
- *Painotettu verkko* voi olla kumpaa tahansa edellisistä tyypeistä, ja siinä on lisäksi solmuilla, kaarilla tai nuolilla jotkin painokertoimet, esimerkiksi kaarilla pituudet tai solmuilla tärkeyskertoimet.

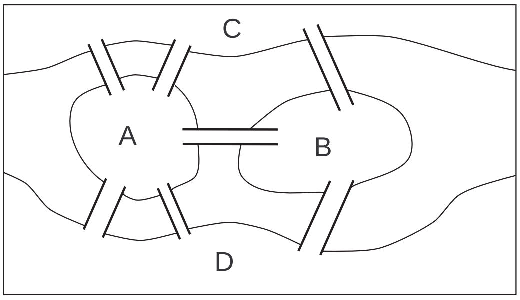
Tarkat määritelmät esiintyvät myöhemmin (ks. Luvut 4.2, 4.3 ja 4.4).

4.1.1 Verkkoteorian synty

Verkkojen tutkimuksen katsotaan alkaneen nk. Königsbergin (nykyisen Venäjän Kaliningrad) sillat-ongelmasta 1700-luvulla:

> Kaupungin läpi virtaa Pregel-joki, jossa on peräkkäin kaksi saarta, A ja B. Saaresta A on kaksi siltaa ja saaresta B yksi silta molemmille rannoille. Saaret yhdistää toisiinsa yksi silta, yhteensä siis 7 siltaa. Kaupunkilaisia askarrutti se, *onko mahdollista tehdä kävelyretki, jonka aikana kukin silta ylitetään tasan kerran?*

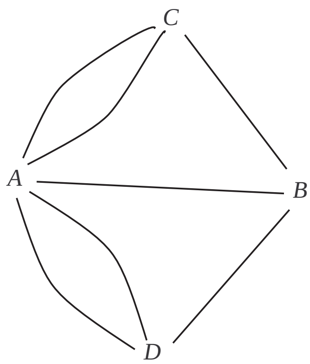
Asiaa tiedusteltiin kuuluisalta sveitsiläiseltä matematiikolta Leonhard Eulerilta, joka *todisti*, ettei ratkaisua ole. Eulerin alkuperäinen päättely oli seuraava:



Kuva 3: Königsbergin sillat 1700-luvulla

Montako kertaa kävelijä käy retken aikana saarella A? Jos hän käy kerran, kahdesti tai kolmesti, hän käyttää vastaavasti 2, 4 tai 6 siltaa, joiden toinen pää on kyseisellä saarella. Mutta siltoja onkin 5!

Euler kiinnostui tämänkaltaisista ongelmista enemmänkin ja näin syntyi uusi matematiikan haara, *verkkoteoria*, jossa tutkitaan *solmujen* ja niitä yhdistävien *kaarien* muodostamien rakenteiden ominaisuuksia. Esimerkiksi Königsbergin sillat-ongelma voidaan tulkita verkoksi sopimalla rannat ja saaret solmuiksi ja sillat kaariksi, ks. Kuva 4.



Kuva 4: Königsbergin sillat verkkokaaviona

4.2 Suuntaamaton verkko

Suuntaamattomassa verkossa emme käytä järjestettyjä pareja, koska niihin liittyy luonnollisella tavalla suunta.

Määritelmä 4.2.1 Joukon $\mathbf{X}$ *järjestämätön* eli *ei-järjestetty tulo* on sen järjestämättömien parien $\langle x_1, x_2\rangle$ joukko

$$\mathbf{X} \,\&\, \mathbf{X} = \{\, \langle x_1, x_2\rangle \mid x_1, x_2 \in \mathbf{X}\,\}.$$

Määritelmä 4.2.2 Kolmikko $(\mathbf{X}, E, \Psi)$ on *suuntaamaton verkko* eli *graafi* (*(undirected) graph, multigraph*), jos $\mathbf{X} \neq \emptyset$ ja E ovat joukkoja ja $\Psi : E \to \mathbf{X} \,\&\, \mathbf{X}$ on kuvaus.

Nimityksiä:

solmu (*vertex, node*)	=	joukon $\mathbf{X}$ alkio
kaari tai väli (*edge, link, arc*)	=	joukon E alkio
vastaavuuskuvaus	=	funktio Ψ

Jos $\Psi(e) = \langle x, y\rangle$, käytetään sanontoja:

- x ja y ovat kaaren e *päitä*
- kaari e *yhdistää* solmut x ja y
- kaari e *liittyy* solmuihin x ja y
- solmut x ja y liittyvät kaareen e.

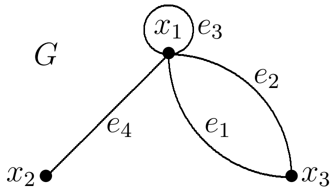
Kaksi solmua ovat *vierekkäisiä* (*adjacent*), jos ne ovat saman kaaren päitä. Kaksi kaarta ovat

- *rinnakkaisia* (*parallel*), jos niillä on yhteiset päät.
- *vierekkäisiä*, jos niillä on ainakin yksi yhteinen pää.

Jos $\Psi(e) = \langle x, x\rangle$, on kaari e *silmukka* eli *luuppi*.
Solmun $x \in \mathbf{X}$ *asteluku* (*degree*) $d_G(x)$ on solmuun liittyvien kaarten määrä, kun silmukan liittyminen otetaan kaksinkertaisena.
Solmu $x \in \mathbf{X}$ on *erillinen* tai *eristetty* (*isolated*), jos $d_G(x) = 0$.

Esimerkki 4.2.3 Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$, missä
$\mathbf{X} := \{x_1, x_2, x_3\}$
$E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
$\Psi(e_1) = \Psi(e_2) := \langle x_1, x_3\rangle$
$\Psi(e_3) := \langle x_1, x_1\rangle$

$\Psi(e_4) := \langle x_1, x_2 \rangle$.



Kaaren e_4 päät ovat x_1 ja x_2. Solmuun x_3 liittyvät kaaret e_1 ja e_2.
Asteet: $d_G(x_1) = 5$, $d_G(x_2) = 1$ ja $d_G(x_3) = 2$.
Kaaret e_1 ja e_2 ovat rinnakkaisia ja vierekkäisiä, kaaret e_1 ja e_3 vierekkäisiä.
Verkossa on yksi silmukka eikä lainkaan erillisiä solmuja.

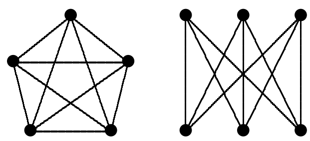
Verkon G sanotaan olevan

- *degeneroitunut* eli *surkastunut*, jos $E = \emptyset$,
- *äärellinen*, jos $\mathbf{X}$ ja E ovat äärellisiä,
- *täydellinen* (complete), jos jokaista solmuparia $x \neq y$ yhdistää ainakin yksi kaari,
- *yksinkertainen* (simple), jos siinä ei ole silmukoita eikä rinnakkaisia kaaria.

Huomautus 4.2.4 Yksinkertaisessa verkossa voidaan solmupari $\langle x, y \rangle$ ja kaari $e = \Psi^{-1}(\langle x, y \rangle)$ samaistaa, $e \sim \langle x, y \rangle$.
Jokaisesta verkosta saadaan täydellinen lisäämällä puuttuvat kaaret, samoin verkosta saadaan yksinkertainen poistamalla silmukat ja liiat rinnakkaiset kaaret.

Esimerkki 4.2.5 Esimerkin 4.2.3 verkko on äärellinen, muttei surkastunut, täydellinen eikä yksinkertainen. Miksi?

Tehtävä 4.2.6 Mitkä edellä luetelluista nimityksistä sopivat seuraaviin nk. *Kuratowskin verkkoihin* K_5 ja $K_{3,3}$:



K_5 $K_{3,3}$

4.2.1 Aliverkko

Määritelmä 4.2.7 Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ suuntaamaton verkko.

a) Verkko $G' = (\mathbf{X}', E', \Psi')$ on verkon G *aliverkko* (*subgraph*), jos verkko G' koostuu osasta verkon G solmuja ja osasta näitä yhdistäviä verkon G kaaria.

   Jos $G' \subseteq G$ on aliverkko ja sisältää *kaikki* ne verkon G kaaret, jotka yhdistävät verkon G' solmuja, niin G' on solmujoukon $\mathbf{X}'$ *virittämä* (*span*) aliverkko.

b) Verkon G *diagonaali* $\Delta_{\mathbf{X}} := \{\, \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbf{X} \,\}$.

c) Verkon G *komplementti* on yksinkertainen verkko $\overline{G}$, johon on koottu kaikki ne kaaret (paitsi ei silmukoita), joita verkossa G ei esiinny.

Esimerkki 4.2.8 Esimerkin 4.2.3 verkon G komplementti on verkko $\overline{G} = (\mathbf{X}, F, \Gamma)$, jossa on yksi puuttuva kaari $F = \{f\} = \{\langle x_2, x_3 \rangle\}$, jolle siis $\Gamma(f) = \langle x_2, x_3 \rangle$. Solmujoukon $\{x_1, x_2\}$ virittämässä verkossa on kaaret e_3 ja e_4 ja solmujoukon $\{x_1, x_3\}$ virittämässä e_3, e_1 ja e_2.

Tehtävä 4.2.9 Mitä kaaria on joukon $\{x_2, x_3\}$ virittämässä verkossa?

Tehtävä 4.2.10 Suunnittele Königsbergiin lisää siltoja niin, että ongelmalla on ratkaisuna suljettu Eulerin ketju.

Tehtävä 4.2.11 Piirrä verkot, jotka kuvaavat Joensuun siltoja

a) kävelijän näkökulmasta,

b) autoilijan näkökulmasta.

Piirrä myös näiden komplementit ja selvitä mitä siltoja vielä puuttuu.

Tehtävä 4.2.12 Piirrä kymmensolmuinen verkko, jossa on mahdollisimman vähän kaaria, ja jossa on kolme silmukkaa, vain kaksi erillistä solmua, neljä solmua, joiden aste on 3, sekä neljä solmua, joiden asteet ovat 2.

Lause 4.2.13 Äärellisessä suuntaamattomassa verkossa
a) kaikkien solmujen asteiden summa $= 2 \cdot n(E)$.
b) paritonasteisten solmujen lukumäärä parillinen.

Todistus. a) Ajatellaan verkkoa aluksi ilman kaaria ja aletaan asettaa niitä takaisin. Kaaren lisääminen kasvattaa astelukujen summaa kahdella, joten väite on tosi.
b) Kohdan a) mukaan asteiden summa on parillinen. Parillisasteisten solmujen summa on parillinen, joten myös paritonasteisten summa on parillinen. Näin paritonasteisia ei voi olla paritonta määrää. Q.E.D

4.2.2 Äärellisten verkkojen esitystapoja

Verkko voidaan esittää mm. luettelona, kaaviona tai matriisina.
1. *Luettelo* sisältää solmujen ja kaarten joukot sekä vastaavuuskuvauksen (ks. Esimerkki 4.2.3).
2. *Kaavioesitys* on geometrinen kuvio, jossa
solmut = 2- tai 3-ulotteisen avaruuden pisteet kaaret = geometriset kaaret.
3. *Yhteysmatriisi* (*adjacency matrix*) $M_G = (a_{ij})_{n\times n}$ on neliömäinen taulukko, jonka rivillä i sarakkeessa j oleva luku a_{ij} ilmoittaa kuinka monta kaarta yhdistää solmun x_i solmuun x_j. Esimerkin 4.2.3 verkon yhteysmatriisi on

$$M_G = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{array}{c} G \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Yhteysmatriisista ei näy kaarten nimet ja solmujenkin nimet jätetään usein merkitsemättä. Yhteysmatriisi on hyvin käyttökelpoinen, kun verkkoja esitetään ja käsitellään esimerkiksi tietokoneella (matriisi- tai taulukkolaskenta).

4.2.3 Ketjut

Tarkastellaan liikkumista verkossa solmusta toiseen pitkin vierekkäisiä kaaria.

Määritelmä 4.2.14 Verkon järjestetty kaarijono $c := (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ on *ketju* (*path, chain*) solmusta x_0 solmujen x_1, x_2, …, x_{n-1} kautta solmuun x_n, jos

1) kukin e_i on solmujen x_{i-1} ja x_i välinen kaari ja

2) mikään kaari ei esiinny jonossa useammin kuin kerran.

Edelleen, solmujono $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ on ketjua c *vastaava solmujono*, merkitään $x_0 \to x_n$. Ketju on

- *suljettu* (*cycle*), jos $x_0 = x_n$, muutoin *avoin.*
- *yksinkertainen*, jos sitä vastaavan solmujonon solmut ovat eri solmuja paitsi mahdollisesti $x_0 = x_n$.
- *pituudeltaan* $|c| :=$ sen kaarien lukumäärä.

Tehtävä 4.2.15 Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$, missä
$\mathbf{X} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,
$\Psi(e_1) = \langle x_0, x_1 \rangle$,
$\Psi(e_2) = \langle x_1, x_3 \rangle$,
$\Psi(e_3) = \langle x_3, x_4 \rangle$,
$\Psi(e_4) = \langle x_4, x_1 \rangle$.
Piirra oheen kyseinen verkko ja muodosta sen yhteysmatriisi.

Esimerkki 4.2.16 Tarkastellaan Tehtävän 4.2.15 verkkoa. Silloin kaarijono $c := (e_1, e_2, e_3, e_4)$ on ketju alkupäänä x_0 ja loppupäänä x_1, se kulkee solmujen x_0, x_1, x_3, x_4, x_1 kautta ja sen pituus on $|c| = 4$. Se ei ole suljettu eikä yksinkertainen.
Jono (e_2, e_3, e_4) on yksinkertainen suljettu ketju $x_1 \to x_1$.
Jono (e_1, e_2, e_3) on avoin yksinkertainen ketju $x_0 \to x_4$.
Kaarijonot (e_1, e_2, e_2) ja (e_2, e_3, e_4, e_2) eivät ole ketjuja.

Tehtävä 4.2.17 Usein ketju voidaan ilmaista pelkkänä solmujonona, mutta ei aina. Milloin solmujonon antaminen ei riitä?

4.2.4 Yhtenäisyys

Määritelmä 4.2.18 Suuntaamaton verkko on *yhtenäinen* (*connected*), jos sen jokaista solmuparia $x \neq y$ kohti on olemassa ketju $x \to y$; muutoin se on *epäyhtenäinen*.

Osoittautuu, että verkko voidaan jakaa *erillisiin yhtenäisiin osiin*: relaatio

$$S := \{(x, y) \mid x = y \text{ tai on olemassa ketju } x \to y\}$$

voidaan osoittaa ekvivalenssiksi. Se jakaa solmujoukon $\mathbf{X}$ ekvivalenssiluokkiin $S(x)$, jotka siis muodostavat osituksen. Kukin osituksen solmujoukko virittää aliverkon, joka on itsessään yhtenäinen verkko.

Määritelmä 4.2.19 Suuntaamattoman verkon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ *yhtenäiset komponentit* ovat ekvivalenssiluokkien $S(x)$, $x \in \mathbf{X}$, virittämät aliverkot.

Verkon yhtenäiset komponentit (ja yhtenäisyys) voidaan selvittää esimerkiksi seuraavilla menetelmillä:

- *depth-first-menetelmä:* lähdetään yhdestä solmusta seuraamaan ketjua niin, ettei vierailla missään solmussa kuin kerran; kun joudutaan umpikujaan, palataan edelliseen risteykseen ja tutkitaan seuraava reitti jne.

- *breadth-first-menetelmä:* lähdetään yhdestä solmusta ja edetään kaikkia siitä lähteviä ketjuja seuraaviin, seuraavista solmuista taas kaikkia niitä seuraaviin jne. niin ettei missään solmussa käydä enempää kuin kerran.

Näin tullaan vierailleeksi lähtösolmun määräämän yhtenäisen komponentin kaikissa solmuissa.

Tehtävä 4.2.20 Tehtävän 4.2.15 verkko on epäyhtenäinen. Määritä yhtenäiset komponentit.

Määritelmä 4.2.21 Yhtenäisen verkon kaarta sanotaan *sillaksi* (*bridge*), jos sen poistaminen epäyhtenäistää verkon.

Tehtävä 4.2.22 Missä edellä olleissa esimerkkiverkoissa on siltoja? ———

Pähkinä 4.2.23 Miten relaation sulkeumaa voidaan käyttää verkon yhtenäisyyden testauksessa?

4.3 Suunnattu verkko

4.3.1 Suunnattu vs. suuntaamaton

Jos verkon solmuja yhdistävät kaaret ovat yksisuuntaisia, niitä sanotaan *nuoliksi* eli *suunnatuiksi väleiksi* (*arc, arrow*).

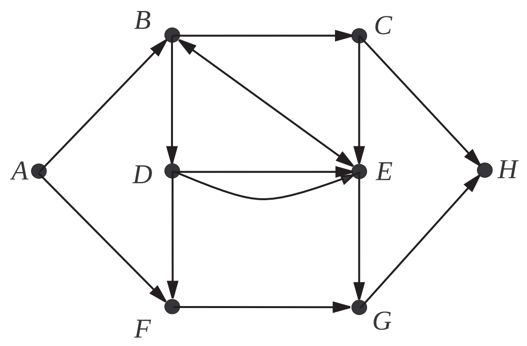
Määritelmä 4.3.1 Kolmikko $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ on *suunnattu verkko* eli *digraafi* (*directed graph, digraph*), jos

(i) solmujoukko $\mathbf{X}$ ei ole tyhjä,

(ii) U on nuolten joukko,

(iii) $\Psi : U \to \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ on vastaavuuskuvaus.

Esimerkki 4.3.2 Kuvassa 5 on eräs 8-solmuinen suunnattu verkko.



Kuva 5: Suunnattu verkko

Nimityksiä. Jos $\Psi(u) = (x, y)$,

- solmu x on nuolen u *lähtösolmu*,
- solmu y on nuolen u *maalisolmu*,
- solmut x ja y ovat *päätesolmuja*.

Edelleen käytetään myös nimityksiä (ks. Luku 4.2) *liittyy*, *vierekkäinen*, *rinnakkainen*, *silmukka* eli *luuppi*, *erillinen*, *surkastunut*, *äärellinen*.
Nuolet $u \neq v$ ovat

- *vahvasti rinnakkaiset*, jos $\Psi(u) = \Psi(v)$,

- *vastakkaiset*, jos $\Psi(u) = (x, y)$ ja $\Psi(v) = (y, x)$.

Solmun x

- *lähtöaste* (*out-degree, positive degree*) $d_G^+(x)$ on solmusta lähtevien nuolten lukumäärä,

- *maaliaste* (*in-degree, negative degree*) $d_G^-(x)$ solmuun saapuvien nuolten lukumäärä.

Verkko on

- *täydellinen*, jos jokaista solmuparia $x \neq y$ kohti on nuoli $x \to y$ tai $y \to x$,

- *yksinkertainen*, jos se ei sisällä silmukoita eikä vahvasti rinnakkaisia nuolia.

Käsitteet *aliverkko*, *virittäminen*, *diagonaali* ja *komplementti* määritellään kuten suuntaamattomalle verkolle.

Tehtävä 4.3.3 Selvitä Kuvan 5 suunnatusta verkosta seuraavat asiat:

- a) Solmujen asteet: ______________________________

- b) Onko se yksinkertainen __________, onko se täydellinen __________

- c) Mitä rinnakkaisia nuolia löydät: ______________________________

Suunnattua verkkoa *vastaava suuntaamaton verkko* saadaan muuttamalla nuolet kaariksi. Myös suuntaamaton verkko voidaan *suunnistaa*, kunhan sovitaan korvataanko kaari vastakkaisilla nuolilla vai käytetäänkö jotain muuta menetelmää.

Tehtävä 4.3.4 Piirrä oheen suunnattu verkko $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$, jossa
$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$,
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,
$\Psi(u_1) = (x_3, x_1)$,
$\Psi(u_2) = (x_1, x_3)$,
$\Psi(u_3) = (x_1, x_1)$,
$\Psi(u_4) = (x_1, x_2)$.

Esimerkki 4.3.5 Tehtävän 4.3.4 verkko G ei ole yksinkertainen eikä täydellinen, miksi? ______________________________
Solmun x_1 asteet ovat

$$d_G^+(x_1) = 3, \quad d_G^-(x_1) = 2,$$

Komplementin nuolet ovat (x_2, x_1), (x_2, x_3) ja (x_3, x_2).

Tehtävä 4.3.6 Tehtävän 4.3.4 muiden solmujen asteet ovat: ______________

Lause 4.3.7 Äärellisen suunnatun verkon solmujen lähtö- ja maaliasteiden summa $= 2 \cdot n(U)$.

Todistus. Jokaisella nuolella on yksi lähtö ja maali. Q.E.D
Suunnattuja verkkoja esitetään luetteloina, kaavioina ja yhteysmatriiseina. Tehtävän 4.3.4 yhteysmatriisi

$$M_G = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{array}{c c} G & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Suunnattuun verkkoon $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ liittyy yksinkertainen suunnattu verkko G_0, josta on poistettu ylimääräiset vahvasti rinnakkaiset nuolet. Jäljelle jääneiden nuolten (kuva)joukko $\Psi(U) \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ on verkon G *seuraajarelaatio* $R_G := \Psi(U)$, jolle

$$xR_Gy \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi(u) = (x,y) \text{ jollekin } u \in U.$$

Tehtävä 4.3.8 Piirrä oheen suunnattu verkko $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$, jossa
$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$,
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,
$\Psi(u_1) = \Psi(u_2) = (x_1, x_2)$,
$\Psi(u_3) = (x_1, x_3)$,
$\Psi(u_4) := (x_3, x_1)$.
Tällöin seuraajarelaatio $R_G =$ ______________________________

4.3.2 Polut ja yhtenäisyyskäsitteet

Määritelmä 4.3.9 Suuntaamattoman verkon ketjua $x_0 \to x_n$ vastaa suunnatun verkon *polku* (*path*), joka koostuu peräkkäisistä kulkusuuntaan osoittavista nuolista.
Polku p on

- *suljettu* (*cycle*), jos $x_0 = x_n$, muutoin *avoin*,
- *yksinkertainen*, jos $x_i \neq x_j$, paitsi ehkä $x_0 = x_n$.

Voidaan todistaa, että jokaista polkua $x \to y$ kohti on olemassa yksinkertainen polku $x \to y$.

Tehtävä 4.3.10 Suunnittele verkko, johon voit piirtää ei-yksinkertaisen polun solmusta x solmuun y. Valitse sitten yksinkertainen polku $x \to y$. Miten yksinkertaistusprosessi voidaan tehdä missä tahansa äärellisessä verkossa? ____

____

Esimerkki 4.3.11 Olkoot
$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$,
$U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ja
$u_1 := (x_1, x_2)$, $u_2 := (x_2, x_3)$, $u_3 := (x_3, x_2)$.
Nuolijono
(u_1, u_2, u_3) on polku, ei suljettu eikä yksinkertainen.
(u_2, u_3) on suljettu ja yksinkertainen.
(u_1, u_2, u_3, u_2) ei ole polku.

Määritellään kaksi eriasteista yhtenäisyyden käsitettä. Ekvivalenssirelaatio

$$S := \{ (x, y) \mid x = y \text{ tai on olemassa polut } x \leftrightarrow y \}$$

jakaa solmujen joukon $\mathbf{X}$ ekvivalenssiluokkiin.

Määritelmä 4.3.12 a) Suunnattu verkko on *yhtenäinen*, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko on yhtenäinen.
b) Suunnatun verkon $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ *vahvasti yhtenäiset komponentit* ovat solmujoukkojen $S(x)$, $x \in \mathbf{X}$, virittämät aliverkot. Verkko G on *vahvasti yhtenäinen*, jos sillä on vain yksi vahvasti yhtenäinen komponentti.

Esimerkki 4.3.13 Esimerkin 4.3.11 verkko on yhtenäinen, mutta ei vahvasti yhtenäinen. Sen vahvasti yhtenäiset komponentit ovat solmujoukkojen $\{x_1\}$ ja $\{x_2, x_3\}$ virittämät. Nuoli u_1 ei kuulu kumpaankaan.

Tehtävä 4.3.14 Keksi kuusisolmuinen yhtenäinen suunnattu verkko, jossa on kolme vahvasti yhtenäistä komponenttia.

4.4 Painotettu verkko

Määritelmä 4.4.1 Olkoon $G = (\mathbf{X}, A, \Psi)$ yksinkertainen suuntaamaton (tai suunnattu) verkko ja $g_A : A \to \mathbf{R}$ *painofunktio* (*weight function*), so. kuvaus, joka liittää verkon jokaiseen kaareen e *painon* $g_A(e)$. Tällöin nelikko $G = (\mathbf{X}, A, \Psi, g_A)$ on *painotettu verkko*.

Verkon painot ilmaistaan usein *painomatriisina* $M_{G,W} = (w_{ij})_{n\times n}$, joka saadaan yhteysmatriisista $M_G = (a_{ij})_{n\times n}$ korvaamalla

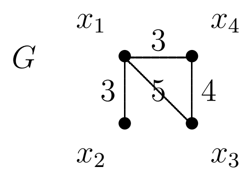
luvut $a_{ij} > 0$ painoilla w_{ij}

luvut $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, äärettömillä

luvut a_{ii} nollilla (tai äärettömillä).

Siis, jos solmuja x ja y yhdistää jokin kaari, painomatriisin rivin i sarakkeen j luku w_{ij} ilmaisee kyseisen kaaren painon. Jos kaarta ei ole, on paino ääretön. Joskus – esimerkiksi kauppamatkustajan ongelmassa – myös diagonaalin painot kannattaa asettaa äärettömiksi.
Jos painot ovat etäisyyksiä, painomatriisia kutsutaan usein *etäisyysmatriisiksi* (*distance matrix*).

Esimerkki 4.4.2 Seuraavassa eräs suuntaamaton painotettu verkko ja sen painomatriisi:



$$M_{G,W} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 0 & 4 \\ 3 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 4.4.3 Selvitä Joensuun opiskelija-asuntoloiden väliset etäisyydet ja piirrä painotettu verkko, joka kuvaa tilannetta. Muodosta myös etäisyysmatriisi.

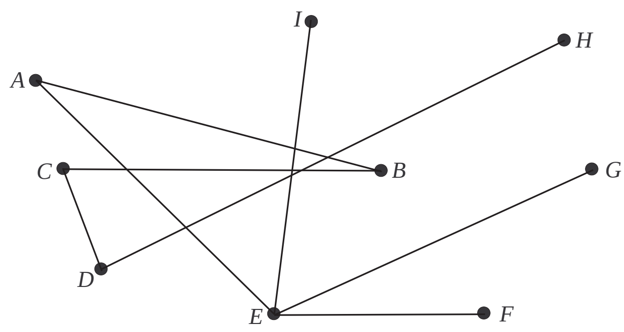
4.5 Puut ja virittävät puut

Tässä Luvussa esittelemme verkkoteoreettisia *puita* koskevia perusasioita. Lukijan olisi hyvä tutustua tarvittaviin käsitteisiin Luvuista 4.2, 4.3 ja 4.4.

4.5.1 Suuntaamaton puu

Määritelmä 4.5.1 Suuntaamaton verkko on *metsä* (*forest*), jos siinä ei ole suljettuja ketjuja. Verkko on *puu* (*tree*), jos se on yhtenäinen eikä siinä ole suljettuja ketjuja. Metsän yhtenäiset komponentit ovat siis puita.

Esimerkki 4.5.2 Kuva 6 esittää puuta, vaikkakaan se ei ole piirretty ihan standardiin muotoon.



Kuva 6: Eräs 9-solmuinen puu

Tehtävä 4.5.3 Puu on siinä mielessä optimaalinen verkko, että yhden kaaren lisääminen tuo suljetun ketjun ja toisaalta kaaren poistaminen epäyhtenäistää verkon. Koeta tätä Kuvan 6 verkolle.
Millaisen verkon saat poistamalla yhden kaaren? ____________________

Puulle, ja yleisemmin metsälle, on voimassa

Lause 4.5.4 Jos $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ on äärellinen suuntaamaton metsä, jossa on p komponenttia, on

$$n(\mathbf{X}) = n(E) + p.$$

Erikoisesti on puulle voimassa yhtälö $n(\mathbf{X}) = n(E) + 1$.

Tehtävä 4.5.5 Olkoon G verkko, jonka solmut ovat 1, 2, 3, …, 12. Sen kaaret esitetään seuraavassa listoina, joiden ensimmäinen alkio on lähtösolmu ja muut solmuja, joihin lähtösolmusta on kaari:

$[1, 4, 9]$,
$[2, 6]$,
$[3, 12]$,
$[4, 1]$,
$[5, 7, 11]$,
$[6, 2, 8]$,
$[7, 5]$,
$[8, 6]$,
$[9, 1]$,
$[11, 5, 12]$,
$[12, 3, 11]$.

a) Piirrä oheen kyseinen verkko. Onko kyseessä puu? ________________

b) Montako yhtenäistä komponenttia? ____________________________

c) Mitkä ovat yhtenäiset komponentit? ___________________________

d) Onko kyseessä metsä? ____

4.5.2 Suunnattu juurellinen puu

Määritelmä 4.5.6 Suunnattu verkko on *juurellinen suunnattu puu juurena* (*root*) solmu j, jos vastaava suuntaamaton verkko on puu ja solmusta j on polut jokaiseen muuhun solmuun. Solmun välittömät seuraajat ovat *lapsia*, edeltäjät *vanhempia*. Lapsettomia (polkujen loppupäissä olevia) solmuja sanotaan *lehdiksi*.

Suunnattu juurellinen puu esitetään havainnollisimmin Hassen kaaviona niin, että

1) juuri piirretään ylimmäksi ja

2) lapset aina vanhempiensa alapuolelle.

Puu näyttää silloin ylösalaisin olevalta puulta (tai pensaalta). Nuolista voidaan myös jättää kärjet piirtämättä.

Tehtävä 4.5.7 Suuntaamattomasta puusta saadaan varsin luonnollisella tavalla juurellinen suunnattu puu. Miten? ____________________________

Tehtävä 4.5.8 Muunna yllä kuvatulla tavalla Kuvan 6 verkko niin, että solmu A on juuri ja sijaitsee ylimpänä.
Luettele puusi lehdet: ____

4.5.3 Binääripuu

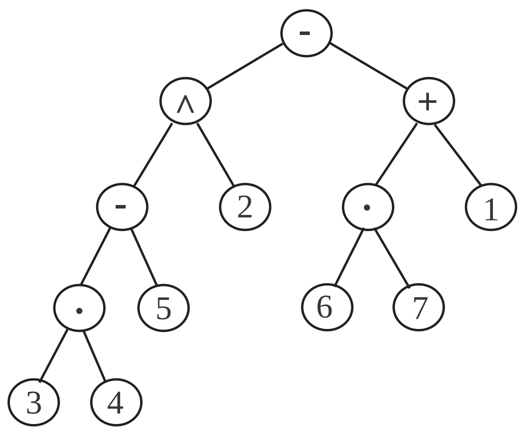
Määritelmä 4.5.9 Suunnattu juurellinen puu on *binääripuu* (binary tree), jos jokaisella solmulla on (enintään) kaksi lasta. Näitä kutsutaan *vasemmaksi* ja *oikeaksi*.

Binääripuita käytetään erityisesti tietotekniikassa, mutta myös monissa muissa yhteyksissä.

Esimerkki 4.5.10 Aritmeettisen lausekkeen laskujärjestys voidaan esittää binääripuuna. Esimerkiksi lauseke

$$(3 \cdot 4 - 5)^2 - (6 \cdot 7 + 1)$$

binääripuuna:



Kuva 7: Laskutoimitus binääripuuna

Tehtävä 4.5.11 Esitä ainakin kahdella eri tavalla binääripuuna lauseke

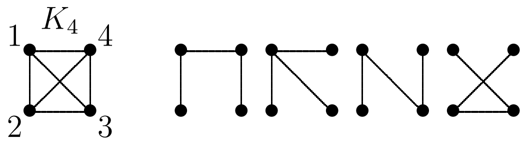
$$(a - b)(a + b),$$

missä a ja b ovat reaalilukuja.

4.5.4 Virittävä puu

Jos halutaan tutkia verkkoa lähinnä sen solmujen osalta, ei ole tarpeen käyttää sen kaikkia kaaria. Yhtenäisessä verkossa liikkuminen helpottuu, jos sille löydetään yhtenäinen aliverkko, joka sisältää samat solmut, mutta mahdollisimman vähän kaaria; siis puu.
Verkon G aliverkko, jossa on kaikki verkon G solmut ja joka on puu, on verkon G *virittävä puu* (spanning tree).

Esimerkki 4.5.12 Yksinkertaisen täydellisen 4-solmuisen verkon K_4 virittäviä puita on seuraavia tyyppejä



eri asennoissa, ja kussakin luokassa on 4 erilaista puuta. Yhteensä näitä on siis $4 \cdot 4 = 16$. Yleinen tulos on

Lause 4.5.13 (Cayleyn lause). Yksinkertaisella täydellisellä n-solmuisella ($n \geq 2$) suuntaamattomalla verkolla K_n on n^{n-2} erilaista virittävää puuta.

Tehtävä 4.5.14 Piirrä kaikki verkon K_3 ja $K_{3,3}$ virittävät puut.

Voidaan todistaa, että suuntaamaton verkko on yhtenäinen jos ja vain jos sillä on virittävä puu. Yhtenäisen verkon virittävän puun löytämiseksi voidaan

- vähentää verkosta kaaria niin, että verkko säilyy yhtenäisenä.
- lisätä vastaavaan tyhjään verkkoon kaaria niin paljon kuin voidaan ilman että syntyy suljettua ketjua.

Esimerkiksi depth- ja breadth-first algoritmit soveltuvat jälkimmäiseen menettelyyn.

5 VERKKO-ONGELMIA

Luvuissa 4.2,4.3,4.4 ja 4.5 on esitelty selvitelty perusasioita erilaisista verkoista. Verkkoteoriassa terminologia on siksi kirjavaa, että asioihin päällisinpuolin perehtyneenkin on syytä tarkistaa ainakin käytetyt määritelmät ennen kuin ryhtyy käyttämään hyväksi tässä Luvussa esitettäviä menetelmiä.

5.1 Reittiongelmia

Tässä Luvussa luomme katsauksen joihinkin verkkojen ketjuja tai polkuja koskeviin kuuluisiin ongelmiin. Näistä eräisiin – esimerkiksi kauppamatkustajan ongelmaan – ei nykyäänkään tiedetä hyviä, kaikenkattavia tarkkoja ratkaisumenetelmiä.

5.1.1 Eulerin ketjut

Olkoon tässä pykälässä $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ äärellinen suuntaamaton verkko, ks. Luku 4.2.

Määritelmä 5.1.1 Verkon ketju on *Eulerin ketju*, jos se sisältää kaikki verkon kaaret. Jos verkossa on suljettu Eulerin ketju, on kyseessä *Eulerin verkko*.

Jo Euler selvitti tyhjentävästi Eulerin ketjun *olemassaololle* helposti tarkastettavat ehdot (yhtenäisyys-käsite: kertaa Luku 4.2.4):

Lause 5.1.2 Olkoon G äärellinen suuntaamaton verkko, jossa ei ole erillisiä solmuja. Silloin

a) Verkossa G on suljettu Eulerin ketju jos ja vain jos G on yhtenäinen ja siinä ei ole paritonasteisia solmuja. Eulerin verkon jokainen Eulerin ketju on suljettu.

b) Verkossa G on avoin Eulerin ketju jos ja vain jos G on yhtenäinen ja siinä on täsmälleen kaksi paritonasteista solmua. Jos verkossa G on yksikin avoin Eulerin ketju, sen jokainen Eulerin ketju on avoin päinään kyseiset paritonasteiset solmut.

Todistus. (vain osittain) Todistetaan vain se puoli, josta saadaan eräs (kömpelöhkö) keino Eulerin ketjun etsimiseksi. Olkoon siis G yhtenäinen ja kaikki solmut parillista astetta. Olkoon x verkon eräs solmu ja e siihen liittyvä kaari. Toistetaan seuraavaa prosessia, kunnes kaikki kaaret ovat ketjussa:

Lähdetään solmusta x kaarta e pitkin muodostamaan ketjua, johon otetaan yksi kerrallaan uusi kaari, kunnes on pakko pysähtyä johonkin solmuun y. Asteiden parillisuudesta seuraa (miten?), että on oltava $y = x$. On saatu suljettu ketju. Asia on selvä, jos tämä ketju sisältää kaikki kaaret. Jos ei, etsitään ketjusta ensimmäinen solmu z, johon liittyy käyttämätön kaari f, otetaan z uudeksi lähtösolmuksi ja jatketaan siitä kuten edellisessä ketjussa solmuun x ja siitä edelleen solmuun z. Nimetään z solmuksi x, f kaareksi e ja palataan alkuun.

Q.E.D

Tehtävä 5.1.3 Miten Lauseen 5.1.2 kohdan b) vastaavan osan todistus, siis avoimen Eulerin ketjun etsiminen, onnistuu kohdan a) menetelmää hyväksi käyttäen? ____

Esimerkki 5.1.4 Königsbergin sillat-ongelmassa, Luvussa 4.1.1, kysyttiin siis, onko vastaavassa verkossa (suljettuja) Eulerin ketjuja. Kaikki neljä solmua ovat paritonta astetta, joten tuolloin siellä ei ollut avoimia eikä suljettuja Eulerin ketjuja.

Esitetään vielä konkreettisempi menetelmä, nk. Fleuryn algoritmi. Käytämme tässä käsitettä *silta*, ks. Määritelmä 4.2.21.
Fleuryn algoritmi Olkoon G yhtenäinen ja kaikki solmut parillista astetta. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että verkossa ei ole luuppeja. Lisäksi tiedetään, että verkossa G ei voi olla pelkkiä siltoja; miksi? ____________

Askel 1 Valitaan jokin verkon kaari e_1, joka ei ole silta. Olkoot x_1 ja x_2 kaaren e_1 päät. Alustetaan kaari- ja solmujonot asettamalla

$$\mathbf{c_1} = (e_1) \text{ ja } \mathbf{x_1} = (x_1, x_2),$$

poistetaan e_1 verkosta G ja merkitään jäljellä olevaa verkkoa G_1. Jos verkossa G_1 ei ole kaaria, lopetetaan prosessi.

Askel 2 Jos verkossa G_1 on kaaria, ainakin yhdellä niistä on oltava päänä x_2.

Nyt valitaan näistä yksi kaareksi e_2 seuraavasti: jos näitä on vain yksi, otetaan se ja poistetaan myös (nolla-asteiseksi jäänyt) solmu x_2, muutoin poistetaan sellainen kaari, joka ei ole silta verkossa G_1. Miksi tällaisia löytyy? ____________________________________

Olkoon uuden kaaren toinen pää x_3. Asetetaan

$$\mathbf{c_2} = (e_1, e_2) \text{ ja } \mathbf{x_2} = (x_1, x_2, x_3).$$

Jos jäljelle jää verkko G_2, jossa ei ole kaaria, lopetetaan prosessi.

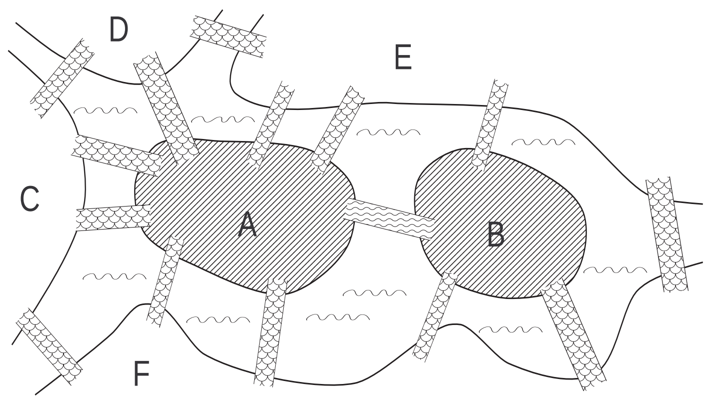
Askeleet 3 – Jos verkossa G_2 on kaaria, ainakin yhdellä on päänä x_3. Toimitaan kuten edellä, siirretään kaaria ketjuun kunnes kaaret loppuvat.

Huomautus 5.1.5 Annetusta suuntaamattomasta verkosta on *ennen algoritmien käyttöä* testattava yhtenäisyys sekä asteiden kelvollisuus.

Usein tehtävänä on lisätä (tai poistaa) annetusta verkosta minimaalinen määrä kaaria niin, että saatu verkko on Eulerin verkko.

Tehtävä 5.1.6 Mitä siltoja Königsbergiin pitäisi rakentaa, jotta saataisiin Eulerin verkko?

Tehtävä 5.1.7 Tutki Kuvan 8 Eulerin keksimää verkkoa: muodosta sen yhteysmatriisi, piirrä kaavio ja selvitä Eulerin ketjujen olemassaolo ja luonne.



Kuva 8: Eulerin keksimä verkko Tehtävässä 5.1.7

5.1.2 Hamiltonin ketjut

Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ tässä pykälässä suuntaamaton, äärellinen, yhtenäinen ja yksinkertainen verkko. Tarkastellaan yksinkertaisia ketjuja, joita pitkin voi kulkea verkon jokaisen solmun kautta täsmälleen kerran. Tällainen ketju voi olla avoin tai suljettu. Tässä tarkastellaan lähinnä suljettujen ketjujen olemassaoloa, sillä se liittyy olennaisesti nk. *kauppamatkustajan ongelmaan*.

Määritelmä 5.1.8 Yksinkertaista ketjua, joka kulkee verkon jokaisen solmun kautta, sanotaan *Hamiltonin ketjuksi*. Verkko on *Hamiltonin verkko*, jos siinä on yksikin suljettu Hamiltonin ketju.

Hamiltonin ketjujen etsiminen suurista verkoista on erittäin hankala ongelma. Ainoa yleinen menetelmä on *triviaali menetelmä* so. tutkia kaikki mahdolliset ketjut!
Tämä voidaan tehdä alkaen samaan tapaan kuin depth-first-menetelmässä: kuljetaan lähtösolmusta niin kauas kuin päästään vierailematta edellisissä solmuissa uudestaan. Jos näin saadussa ketjussa on kaikki solmut, on saatu avoin Hamiltonin ketju ja voidaan tarkastaa, voidaanko ketju sulkea. Tarvittaessa palataan edelliseen solmuun ja valitaan toinen reitti jne.
Solmuissa vierailuista pidetään kirjaa niin, että tiedetään, onko kunkin solmun kaikki lähtösuunnat jo tarkastettu.

Tehtävä 5.1.9 Olkoot
$\mathbf{X} = \{a, b, c, d, e\}$ ja
$E = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle b, e\rangle, \langle e, c\rangle\}$.
Piirrä verkko ja selvitä, onko verkossa Hamiltonin ketjuja?

Välttämättömiä ehtoja. Osoitettaessa, että verkossa *ei voi olla* suljettua Hamiltonin ketjua, voidaan käyttää seuraavia konkreettisia sääntöjä, jotka ovat ketjun olemassaololle *välttämättömiä*, tai joita tulee noudattaa ketjua muodostettaessa:

1. Jos verkossa on $n \geq 2$ solmua, avoimessa Hamiltonin ketjussa on aina $n-1$ kaarta, suljetussa n kaarta.

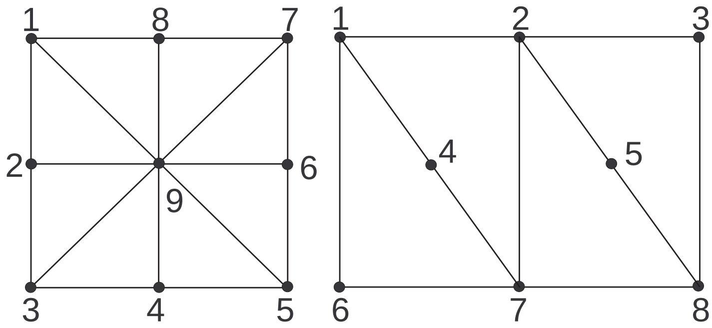
2. Jos solmun x asteluku on 2, niin molemmat kaaret, joiden päänä on x, kuuluvat jokaiseen suljettuun Hamiltonin ketjuun.

Riittäviä ehtoja. On olemassa enemmän tai vähemmän hankalia ehtoja, jotka kieltävät tai takaavat Hamiltonin ketjun olemassaolon. Tässä niistä pari; ensimmäinen on triviaali, toinen on Diracin lause vuodelta 1952:

1. Täydellisessä verkossa on suljettu Hamiltonin ketju.

2. Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ äärellinen, suuntaamaton, yhtenäinen ja yksinkertainen verkko, jossa on n solmua, $n \geq 3$. Jos $d_G(x) \geq \frac{n}{2}$ kaikilla $x \in \mathbf{X}$, on verkossa suljettu Hamiltonin ketju.

Tehtävä 5.1.10 Etsi Hamiltonin ketjut (jos niitä on) Kuvan 9 verkoista a) ja b).
Kuvion a) Hamiltonin ketju: ______________________________
Kuvion b) Hamiltonin ketju: ______________________________



Kuva 9: Verkot a) ja b) Tehtävään 5.1.10

5.1.3 Kauppamatkustajan ongelma

Kauppamatkustajan ongelmassa (*travelling salesperson problem*) henkilön täytyy käydä kiertomatkallaan täsmälleen kerran jokaisessa Suomen kaupungissa.
Onko tämä ylipäätään mahdollista?
Jos on, mikä on lyhin reitti?

> *Matemaattinen muotoilu:* kaupungit verkon solmuja ja tiet kaaria, joilla on painoina kaupunkien väliset etäisyydet. Onko näin muodostuvassa verkossa suljettu Hamiltonin ketju? Jos on, mikä niistä on lyhin?

Periaatteessa ratkaisun löytää tutkimalla kaikkia mahdollisia suljettuja Hamiltonin ketjuja. Esimerkiksi täydellisessä n-solmuisessa verkossa on $(n-1)!$ (kertoma) kappaletta erilaisia suljettuja Hamiltonin ketjuja, joten menetelmä on äärimmäisen työläs. Kelvollista nopeata yleistä menetelmää ei ole onnistuttu kehittämään; kyseessä onkin *kompleksisuudeltaan nk. $\mathcal{NP}$-täydellinen ongelma.*

Tehtävä 5.1.11 Millainen reitti kannattaa valita henkilön, joka jakaa postia Joensuun opiskelija-asuntoloihin (ks. Tehtävä 4.4.3)?

Suurissa verkoissa on usein ainoa keino turvautua approksimatiivisiin ratkaisuihin. Näitä on nykyään kehitteillä runsaasti ja parhaimmillaan päästään ratkaisuihin, jotka poikkeavat oikeasta vain muutaman prosentin verran.
Quick travelling salesperson-algoritmi. Olkoon G yksinkertainen täydellinen painotettu verkko, jossa on n solmua. Oletetaan, että verkon painot toteuttavat *kolmioepäyhtälön*

$$w_{ik} \leq w_{ij} + w_{jk}$$

– mutkan kautta ei ole lyhyempi matka kuin suoraan – minkä useimmat käytännön ongelmat toteuttavatkin.
Voidaan osoittaa, että seuraava menetelmä antaa kohtuullisen hyvän *approksimatiivisen* ratkaisun, joka on huonoimmassakin tilanteessa pituudeltaan korkeintaan kaksinkertainen verrattuna oikeaan ratkaisuun.

> *Valitaan solmu x_1 ja sitä lähinnä oleva solmu x_2 ja asetetaan $h = (x_1, x_2, x_1)$. Toistetaan, kunnes kaikki solmut ovat ketjussa h:*
>
> **Toista** Lisätään ketjuun yksi lähimpänä ketjua h oleva uusi solmu z sen solmun edelle, jota lähimpänä z on.

Tehtävä 5.1.12 Olkoon G painotettu verkko etäisyysmatriisina

$$M_{G,W} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 3 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & \infty & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & \infty & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & \infty & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 5 & \infty & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 5 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

Piirrä verkko mahdollisimman hyvin niin, että etäisyydet pitävät paikkansa. Selvitä toteuttaako verkko edellä vaaditun kolmioepäyhtälön: __________

Esimerkki 5.1.13 Sovelletaan "quick"-algoritmia Tehtävän 5.1.12 verkkoon G. Olkoot solmut nimeltään $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Valitaan

$$h_2 := (1, 4, 1).$$

Näitä solmuja lähinnä on solmu 3, jota lähinnä on 4:

$$h_3 := (1, 3, 4, 1).$$

Jatkossa on hieman valinnan varaa: Edellisiä lähinnä on kaksi solmua, 2 ja 6. Valitaan näistä 2, joka on lähimpänä ketjun solmua 3:

$$h_4 := (1, 2, 3, 4, 1).$$

Solmu 6 on lähimpänä ketjua h_4:

$$h_5 := (1, 2, 3, 4, 6, 1).$$

Solmu 5 on lähinnä solmua 6:

$$h_6 := (1, 2, 3, 4, 5, 6, 1).$$

Ratkaisun pituus on 19, kun lyhin olisi 18 (mikä se on?). Aloittamalla jostain muusta solmusta tai tekemällä äskeiset valinnat toisin saataisiin erilaisia arvioita.

5.1.4 Lyhimmät ketjut

Olkoon G yksinkertainen yhtenäinen painotettu verkko.

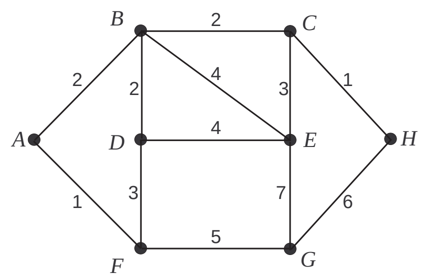
Ongelma Etsi verkon kahta solmua x ja y yhdistävistä ketjuista lyhin.

Alkeellisin ja samalla tehottomin menetelmä on etsiä kaikki ketjut $x \to y$ ja valita näistä lyhin.
Huomattavasti parempi, mutta myös hieman hankalammin käsiteltävä menetelmä on *E. Dijkstran* vuonna 1959 esittämä algoritmi, jolla haluttaessa saadaan myös lyhimmät ketjut solmusta x kaikkiin muihin solmuihin *virittävän puun* muodossa (ks. Luku 4.5):

> *Olkoon H aluksi verkko, jossa on vain lähtösolmu x. Lähdetään kasvattamaan verkkoa H yksi solmu kerrallaan toistamalla seuraavaa prosessia, kunnes solmu y (tai kaikki solmut) ovat verkossa H:*
>
> **Toista** Etsitään sellainen verkkoon H kuulumaton solmu, johon on lyhin matka lähtösolmusta x verkossa H. Lisätään tämä solmu ja kaari verkkoon H.

On selvää, että näin syntyneessä verkossa H jokaista solmuparia $x \neq z$ yhdistää täsmälleen yksi ketju. On myös melko ilmeistä, että kaikki muut ketjut verkossa G ovat ainakin yhtä pitkiä.

Tehtävä 5.1.14 Etsi lyhimmät ketjut Kuvan 10 verkon solmusta A muihin solmuihin.



Kuva 10: Tehtävän 5.1.14 painotettu verkko

Jos halutaan tietää vain kaikkien solmuparien välisten lyhimpien ketjujen *pituudet*, voidaan käyttää *Floydin* algoritmia. Olkoon $D = (d_{ij})_{n\times n}$ verkon

G etäisyysmatriisi. Matriisi D ilmaisee tällöin solmujen välisten *yhden kaaren pituisten ketjujen* pituudet. Floydin algoritmissa matriisia D muunnetaan n kertaa niin, että kussakin vaiheessa p saadaan matriisiin lyhimmän *enintään* p *kaarta* sisältävän ketjun pituus:

```
for k = 1 : n
  for i = 1 : n
    for j = 1 : n
      if (D(i,k) + D(k,j) < D(i,j))
        D(i,j) = D(i,k) + D(k,j);
      end
    end
  end
end
```

Esimerkki 5.1.15 Esimerkin 4.4.2 tapauksessa etäisyysmatriisista saadaan Floydin menetelmällä lyhimpien ketjujen pituudet

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 5.1.16 Laske Tehtävän 5.1.14 lyhimpien ketjujen pituudet.

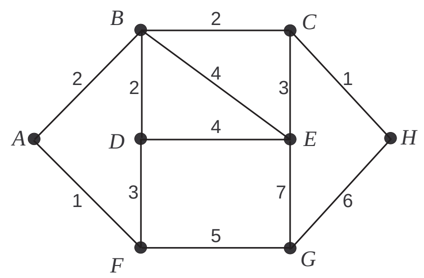
5.2 Muita verkko-ongelmia

5.2.1 ”Halvin” virittävä puu

Painotetun verkon virittävä puu, jossa kaaripainojen summa on mahdollisimman pieni, on *halvin virittävä puu* (*minimal, cheapest, economy tree*). Painotetusta yhtenäisestä verkosta löydetään Dijkstran algoritmilla (ks. Luku 5.1.4) sivutuotteena eräs virittävä puu (ei aina halvin), jolla on juurena annettu solmu.
Halvimman virittävän puun etsimiseen kelpaa samankaltainen *Primin algoritmi*, joka toimii seuraavasti:

> *Lähtöpuuksi valitaan halvin kaari päätesolmuineen. Toistetaan, kunnes kaikki solmut ovat puussa:*
>
> **Toista** Lisätään puuhun halvin niistä puuhun liittyvistä kaarista, joiden toinen pää ei vielä ole puussa, sekä kyseinen solmu.

Tehtävä 5.2.1 Etsi Primin algoritmilla halvin virittävä puu Kuvan 11 verkosta.



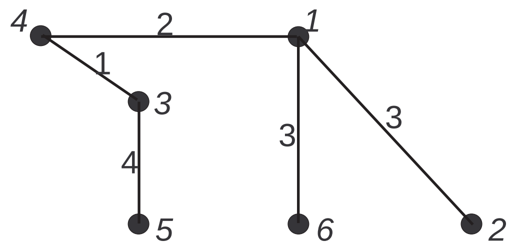
Kuva 11: Tehtävän 5.2.1 painotettu verkko

Esimerkki 5.2.2 Esimerkille 5.1.12 saadaan Primin menetelmällä virittävä puu (Kuva 12), jonka kaarten painojen summa on 13 yksikköä.
Onko muitakin yhtä halpoja? ____________________

Tehtävä 5.2.3 Rakenna Kuvan 13 painotetulle verkolle

a) halvin virittävä puu Primin algoritmilla. ____________________

b) virittävä puu Dijkstran algoritmilla alkaen solmusta 4. ____________________



Kuva 12: Virittävä puu Esimerkkiin 5.2.2

5.2.2 Verkkojen isomorfisuudesta

Kahta suuntaamatonta verkkoa G ja H sanotaan *isomorfisiksi*, jos verkko G saadaan verkosta H sopivalla solmujen ja kaarten nimien muutoksella.
Yhteysmatriisien avulla ilmaistuna: jos H:n matriisista saadaan G:n matriisi järjestämällä H:n solmut sopivasti.
Yleisesti kahden verkon isomorfisuuden toteaminen on verrannollinen solmumäärän kertomaan, siis erittäin työlästä. Erikoista tyyppiä oleville verkoille, kuten puille ja tasoverkoille, on kehitetty nopeitakin menetelmiä.
Joskus voidaan *ei-isomorfisuus* todeta helpostikin käyttäen isomorfisuudesta seuraavia *välttämättömiä* ehtoja:
Kahdella äärellisellä isomorfisella verkolla $G = (\mathbf{X}, A, \Psi)$ ja $H = (\mathbf{Y}, B, \Gamma)$ on

a) sama määrä solmuja.

b) sama määrä kaaria.

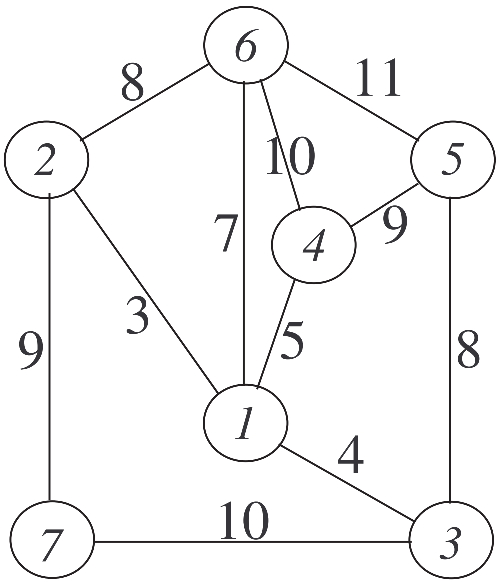
c) sama määrä kunkin asteluvun omaavia solmuja.

d) samat määrät tietynpituisia (suljettuja) ketjuja tai polkuja.

e) sama määrä yhtenäisiä ja vahvasti yhtenäisiä komponentteja,

ja jokaista verkon G komponenttia vastaa sen kanssa verkkona isomorfinen verkon H komponentti, joille pätevät kohdat a) – d).
Nämä ominaisuudet *eivät todista isomorfisuutta!*

Tehtävä 5.2.4 Ovatko seuraavat verkot isomorfisia?



Kuva 13: Tehtävän 5.2.3 painotettu verkko

Esimerkki 5.2.5 Osoita, että verkot G ja H ovat isomorfisia, kun

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu. Olkoot $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ ja $H = (\mathbf{Y}, V, \Gamma)$, missä

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ \mathbf{Y} &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \end{aligned}$$

Olkoot $M_G = (a_{ij})_{5\times 5}$ ja $M_H = (b_{ij})_{5\times 5}$. Yritetään muodostaa bijektio $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ käyttäen isomorfisuudelle välttämättömiä ehtoja.
Koska $a_{13} = b_{24} = 3$, on valittava $f(x_1) = y_2$ ja $f(x_3) = y_4$.
Koska solmut x_4 ja y_5 ovat ainoita, joiden lähtöaste on 1, täytyy olla $f(x_4) = y_5$.
Koska $(x_4, x_5) \in U$, on oltava

$$(f(x_4), f(x_5)) = (y_5, f(x_5)) \in V,$$

joten pitää valita $f(x_5) = y_3$. Lopuksi olkoon $f(x_2) = y_1$.

Järjestämällä funktion f mukaan saadaan

$$M'_H = \begin{array}{c|ccccc} H & y_2 & y_1 & y_4 & y_5 & y_3 \\ \hline y_2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ y_1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array},$$

mistä nähdään, että verkot ovat isomorfiset.

5.2.3 Taso- vai avaruusverkko?

Suuntaamaton verkko G on *tasoverkko* eli *planaarinen*, jos se on esitettävissä tasokaaviona niin, etteivät kaaret leikkaa toisiaan, muutoin se on *avaruusverkko*.

Ongelma Miten selvitetään, onko annettu verkko planaarinen?

Ratkaisu on teoreettisesti yksinkertainen mutta – kuten monet muutkin verkko-ongelmat – käytännössä hidas toteuttaa. Vaikka verkko onnistuttaisiinkin todistamaan tasoverkoksi, jää yleensä vielä selvitettäväksi, miten se on tasoon piirrettävä.
Seuraavaa lausetta käytetään usein osoitettaessa verkkoa avaruusverkoksi:

Lause 5.2.6 (Eulerin kaava verkoille) Olkoon G äärellinen yhtenäinen tasoverkko, jossa on n solmua ja m kaarta. Jos G jakaa tason r alueeseen, niin

$$n - m + r = 2.$$

Seuraus 5.2.7 Jos G on äärellinen yhtenäinen yksinkertainen tasoverkko, jossa on $n \geq 3$ solmua ja m kaarta, niin

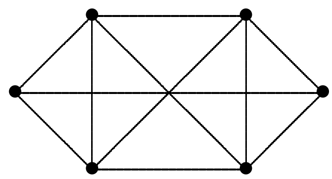
$$m \leq 3n - 6.$$

Huomautus 5.2.8 Jos verkko on tasoverkko, sitä voidaan muuntaa planaarisuuden kärsimättä seuraavasti:

1. Poistetaan silmukat ja rinnakkaiset kaaret.
2. Poistetaan 2-asteinen solmu ja yhdistetään siihen liittyneet kaaret.
3. Kaari ”kutistetaan” pisteeksi, jolloin kaaren päät yhtyvät yhdeksi solmuksi.

Avaruusverkko puolestaan säilyy avaruusverkkona, jos sitä muunnetaan kohtien 1 ja 2 keinoin, mutta kohta 3 saattaa muuttaa sen planaariseksi.
Verkon yksinkertaisuus saatetaan tapauksissa 2 tai 3 menettää.

Esimerkki 5.2.9 Onko seuraava verkko G tasoverkko?



Ratkaisu. Verkko on yksinkertainen ja siinä on 6 solmua ja 11 kaarta, joten pätee $11 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$, mikä ei ole planaarisuuden kanssa ristiriidassa.
Kutistetaan pisin vaakasuora kaari. Muunnettu verkko G' on yksinkertainen ja siinä on 5 solmua ja 10 kaarta, joten $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Seurauksen 5.2.7 nojalla verkko G' ei ole tasoverkko, joten myöskään G ei ole.

Esimerkki 5.2.10 Äärellisiä avaruusverkkoja on olemassa ainakin kaksi, Kuratowskin verkot K_5 ja $K_{3,3}$ (ks. Tehtävä 4.2.6).
Edellinen on yksinkertainen täydellinen 5-solmuinen verkko ja jälkimmäinen nk. *täydellinen kaksijakoinen* (*complete bipartite*) $(3+3)$-solmuinen verkko.

Itse asiassa nämä ovat *olennaisesti ainoat äärelliset avaruusverkot*:

Lause 5.2.11 (Kuratowskin lause). Äärellinen verkko on tasoverkko jos ja vain jos se ei sisällä yhtään sellaista aliverkkoa, joka voidaan muuntaa Huomautuksen 5.2.8 keinoin 1 ja 2 (ei 3) verkoksi, joka on isomorfinen Kuratowskin verkon K_5 tai $K_{3,3}$ kanssa.

Tehtävä 5.2.12 Mitkä seuraavista verkoista ovat planaarisia?

KUVAT

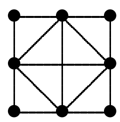
5.2.4 Kartan väritys

Olkoon G eräs valtioiden rajoja kuvaava tasokartta. Valtiot oletetaan yhtenäisiksi alueiksi ja rajanaapuruus tarkoittaa, että valtioilla on yhteistä rajaa enemmän kuin yksittäisten pisteiden verran.

> *Kartanväritysongelma.* Kuinka monta eri väriä tarvitaan kartan värittämisessä, kun rajanaapureilla on oltava eri värit, ts. mikä on kartan *kromaattinen luku* γ?

Probleema verkkoteorian kielellä:
valtiot = solmut $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,
rajanaapuruus merkitsee kaarta $\langle x_i, x_j \rangle$:
Montako väriä γ riittää väritettäessä solmut niin, etteivät vierekkäiset ole samanvärisiä?
Aikojen myötä on esitetty lukuisa joukko osatuloksia tietyn tyyppisille verkoille sekä yleisiä tuloksia $\gamma \leq 6$, $\gamma \leq 5$.
On myös kauan tiedetty, että joillekin tasoverkoille $\gamma = 4$.

Esimerkki 5.2.13 Montako väriä tarvitaan oheisen kartan värittämiseen?

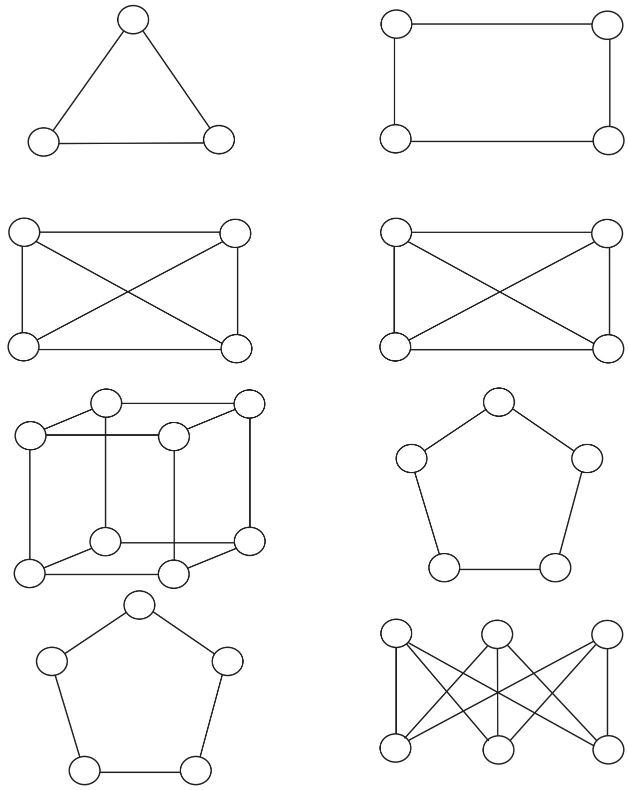


Ratkaisu. 3 väriä ei riitä, sillä sisemmän täydellisen nelisolmuisen aliverkon värittämiseen tarvitaan 4. Toisaalta 4 värillä tehtävä väritys onnistuu helposti. Siis kromaattinen luku on 4.

Kuuluisan *neliväriväittämän* todistukseen, joka perustuu oleellisesti tietokoneen käyttöön, kului aikaa 4 vuotta ja yli 1200 tietokonetuntia.

Lause 5.2.14 (Appel ja Haken, 1976). Tasoverkon kromaattinen luku $\gamma \leq 4$.

Tehtävä 5.2.15 Määritä seuraavien verkkojen kromaattiset luvut:



Tehtävä 5.2.16 Mitkä Tehtävien 5.2.15 ja 5.2.12 verkoista ovat Eulerin, mitkä Hamiltonin verkkoja?