

---

## Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001

Harjoitus 1b (Matlab & DFIELD & PPLANE tietokonedemot)

---

**Demon tarkoitus.** Demoissa opetellaan Matlab-ohjelman käytön alkeita ja tutkitaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöiden suuntakenttiä ja alkuarvot tehtävien numeeris-graafista ratkaisemista. Tuloksia vertaillaan oikeihin ratkaisuihin, jotka piirretään itse Matlabin peruskäskyillä.

**Välineet.** Matlab 6 ja John C. Polkingin sen päälle laatima numeerinen ”DY-laskin”. Matlab on yleiskäyttöinen numeeriseen matriisilaskentaan tarkoitettu ohjelma, jossa voi myös piirtää 2- ja 3-ulotteista grafiikkaa. Matlabissa on oma ohjelmointikielensä, jossa voi

- a) työskennellä interaktiivisesti (tulkkiperiaate)
- b) laatia ja tallettaa komentojonoja suoritettaviksi tarvittaessa (m-scriptfile)
- c) laatia ohjelmia ja aliohjelmia (funktioita), jotka toimivat Matlabin sisällä ja joihin voi liittää interaktiota ym.
- d) käyttää ulkoisia mm. Fortran ja C-kielisiä apuohjelmia

**Systeemin käynnistys mikroluokissa.** Käynnistetään tietokone ja kirjaudutaan normaalisti NT-verkkoon. Käynnistetään Matlab 6 (työpäydän pikakuvake). Matlabin pitäisi latautua komentotilaansa (Command Window) ja esiin pitäisi tulla valmiusmerkki ».

---

### Harjoitellaan aluksi Matlabin käyttöä:

Jatkossa tällaisella konekirjoitustyyliä kirjoitetut ovat Matlabin käskyjä, joita kirjoitetaan valmiusmerkin perään, syöttö ohjelmalle tapahtuu painamalla **Enter**.

Laskutoimitukset (ja loogiset operaatiot ym.) sekä tietoa muista komennoista tai funktioista saat nopeasti näkyviin komennolla `help`, esimerkiksi

```
» 2*4 + 5
» help +
» help exp
```

Tällöin näet usein vain opasteen loppuosan; näet koko tekstin vierittämällä komentoikkunaa ylös-alas (PageUp PageDown, hiiri). Myös Windows-tyylinen **Help**-valinta löytyy yläpalkista, ja sieltä erityisesti **Help Desk** ja **Getting Started**.

Muita yleishyödyllisiä käskyjä: `dir`, `type`, `who`, `what`, `which`, `lookfor`.

**Aikaisemmin kirjoittamiasi käskyjä saat esiin nuoli ylös/alas näppäimillä.**

**1. Funktiolaskimena:** *Laske likiarvot (kirjoita laskutoimitusten symbolit näkyviin ja funktioiden muuttujat tavallisiin sulkuihin!):*

$12.3^2 \sin(2 \cdot 3.23) \approx$  \_\_\_\_\_  $12.3e^{-3.23} + \ln 12.3 \approx$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{1 + 2.3^4} \approx$  \_\_\_\_\_

Tässä käytetyt funktiot: `sin`, `exp`, `log` ja `sqrt`.

Laskuissa voi käyttää symboleja (kirjaimia), jos niille on ensin annettu arvot.

*Laske edelleen (vrt. yllä):*

```
» x = 12.3; y = 3.23;                               puolipiste estää tulostuksen
» x^2 * sin(2*y)                                     ≈ _____
```

## 2. Matriisilaskimena:

Matlabissa voi muuttujana olla myös vektori tai matriisi. Useimmat laskutoimitukset voivat olla *matriisilaskutoimituksia* tai *alkioittaisia*; jälkimmäisissä eteen laitetaan piste, mikäli toimitus eroaa matriisitoimituksesta, esimerkiksi »  $A .* B$  ja »  $A.^2$ . Kuitenkin  $+$ ,  $-$  ja luvulla kertominen ovat molempia!

Luodaan aluksi 4-vaakavektori (1, 2, 3, 4) seuraavasti:

```
» x = 1:4
```

Koeta arvata, mitä seuraavat käskyt laskevat, ja suorita sitten ne:

käsky	arvaus	tulos
$x.^2$		
$2.^x$		
$\exp(x)$		
$x.^x$		
$1./x$		
$x.^(-1)$		

Miten saadaan transpoosi?

Laske (muista Matlab-syntaksi!):

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Matriisi (ja vektori) syötetään seuraavasti: *alkiot hakasulkujen sisällä riveittäin, rivit erotetaan tosistaan puolipisteellä ja riveillä alkiot tyhjeellä tai pilkulla, esim.*

```
» A = [2 3; 4 5]
```

taikka yhtä hyvin

```
» A = [2,3; 4,5]
```

Laske yllä määritellylle matriisille  $A$ :

$$A' \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad 2*A \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad A.^2 \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad A^2 \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad A.^(-1) \approx \underline{\hspace{2cm}}$$

**3. Piirtämiseen:** Kun muuttujan arvot ovat vektori  $\mathbf{x}$  ja vastaavat funktion  $f$  arvot  $\mathbf{y}$ , `plot(x,y)` piirtää käyrän  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  (ks. `help plot`).

Piirrä funktion  $f(x) = \sin x$  kuvaajaa välillä  $[-5, 5]$ .

Opastus: Muodosta riittävän tiheä pisteikkö  $\mathbf{x}$ , esim.

```
» x = -5:0.2:5;
```

tai

```
» x = linspace(-5,5);
```

```
» y = sin(x); plot(x,y) tai suoraan » plot(x, sin(x))
```

## J.C. Polkingin Matlab-ohjelmat DFIELD ja PPLANE

Pujottele selaimella (Netscape, IE) kurssin WWW-sivulle Kurssimateriaalia. Lataa sen taulukosta tiedosto Polking5.zip ja pura se asemaan E: (vain kolme tiedostoa).

Kirjoita Matlabissa käskyt

» cd E:

» what

jolloin hakemistossasi pitäisi näkyä tarvittavat m-tiedostot dfield5.m ja pplane5.m.

4. Käynnistetään suuntakenttiä piirtävä ohjelma dfield5 kirjoittamalla

» dfield5

Tällöin ruudun alareunaan ilmestyy ikkuna **DFIELD5 Setup**, josta näkyvät

- tarkasteltava differentiaaliyhtälö  $x' =$  (voi muuttaa)
- grafiikkaikkunan  $t$ - ja  $x$ -rajat (voi muuttaa)
- nappulat **Quit** (lopetus), **Revert** (palautus ennalleen) ja **Proceed** (etene)

Valitaan hiirellä klikaten **Proceed**. Ruudun yläreunaan ilmestyy **DFIELD5 Display**-ikkuna, johon piirtyy suuntakenttä.

Piirrä suuntakenttään runsaasti ratkaisuja antaen alkuehdot hiirellä, ainakin seuraavat

$$x(2) = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

5. Selvitä, mitä pitävät sisällään **DFIELD5 Displayn** valikot. Kokeile seuraavia optioita sekä kirjoita muistiin niiden merkitykset ja käyttö:

Keyboard Input:

Plot several solutions:

Zoom in:

Erase all solutions:

Delete a graphics object:

Enter text on the Display Window:

Settings:

Make the Display Window inactive:

6. a) Ratkaise käyttäen manuaalista (näppäimistöllä annettavaa) alkuehdon asetusta alkuarvottehtävä  $x(-1.32) = -3.25$ .

b) Anna arviot kyseisen ratkaisun arvoista pisteissä  $t = 0, 1$  ja  $2$ . Tässä voit käyttää Matlabin funktiota `ginput`, joka antaa hiirenklikkauskoordinaatteja (anna Matlabin komentoikkunassa käsky `ginput(3)` ja klikkaa **DFIELD5 Display**-ikkunassa kaikki kolme pistettä, jolloin arvot tulevat komentoikkunaan).

$$x(0) \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad x(1) \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad x(2) \approx \underline{\hspace{2cm}}$$

7. a) Palaa **DFIELD5 Setup**-ikkunaan ja vaihda yhtälöksi  $x' = 2t - x$  (muodossa  $2*t - x$ ) ja rajoiksi  $t : [-4, 4]$ ,  $x : [0, 10]$ .

b) Ratkaise alkuarvot tehtävä  $x(-1) = 1$  piirtämällä.

c) Palautetaan mieleen, että ratkaisut ovat oikeasti muotoa  $x(t) = ce^{-t} + 2t - 2$  (ks. luennot). Ratkaise (vaikka käsin) alkuarvot tehtävästä  $x(-1) = 1$  arvo  $c$ lle ja piirrä Matlabilla ratkaisu äskeiseen kuvaan ja vertaa.

$c \approx$  \_\_\_\_\_

Piirto käy vaikkapa seuraavilla käskyillä:

```
» t = -4:0.2:4
» x = c*exp(-t) + 2*t - 2
» plot(t,x,'-r')
```

Sulje DFIELD5 sen Setupista (File, Quit DFIELD5).

### 8-9. Differentiaaliyhtälöryhmien kuvaaminen - ohjelma PPLANE5

Käynnistä Polkingin PPLANE5-ohjelma sekä tutustu siihen valmiiden yhtälöryhmien avulla (PPLANE5 Setup-valikon **Gallery**).

*Vastaa kysymyksiin:*

Miten saadaan aikaan ratkaisufunktioparin kuvaaminen muuttujansa funktioina?

---

Mitä etsivät ja piirtävät valikosta **Solutions** löytyvät valinnat

**Find an equilibrium point** \_\_\_\_\_

**Show nullclines** \_\_\_\_\_

### 10. Vapaata luovaa kokeilua PPLANE5llä.

Luo mieleisesi kaunis faasikuvi. Syötä sopiva differentiaaliyhtälö ja piirrä ratkaisuja. Voit piirtää samaan kuvioon vielä mitä haluat tavallisilla Matlabin piirtokäskyillä.

Jos et hauskempaa keksi, eräs metka kuvio saadaan yhtälöparilla

$$\begin{cases} x' = y \cos(x^2 - y^2 + 1) \\ y' = -x \cos(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Lopuksi tulosta kuviosi paperille (jos onnistuu!)

---

Myös **Maple**, **Derive**- ja/tai **Mathematica**-ohjelmiin kannattaa tutustua. Niillä voi ratkaista differentiaaliyhtälöitä myös symbolisessa muodossa; niillä voit tarkastaa vaikkapa kotilaskusi. (ks. Helpit ja ohjekirjat).

Verkosta löytyy myös Java-appletteja suuntakenttien piirtoon, esimerkiksi

- J.C. Polking:  
<http://math.rice.edu/~dfield/>
- Simo Kivelä & co (TKK)  
<http://matta.hut.fi/matta/dew.html>
- ja vielä Matthias Kawskin vektorianalysaattori  
<http://math.la.asu.edu/~kawski/>