
Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001

Harjoitus 2

Matematiikan laitos järjestää kotitehtävien ohjausta viikoilla 37-49 (10.9.-5.12.) salissa M9 aikoina ma 14-18, ti 14-18 ja ke 14-16.

Luentomonisteita on jo saatavana, hinta Hinta on 20 mk Epsilonin jäsenille, muille 30 mk.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{a) } \frac{y'}{y} = x^2 + x \quad \text{b) } \frac{y'}{1+y^2} = \cos x \quad \text{c) } yy'e^{-y^2} = 1$$

Vihje: Yhtälöiden vasemmat puolet ovat eräiden funktioiden derivaattoja.

Opiskele Luentomonisteesta Luvut 1.1-1.5 ja ratkaise tehtävät

2. Mihin luokkiin $\mathcal{C}^n([-1, 1])$ (millä luvuilla n) kuuluu

a) funktio $x \mapsto x|x|$?

b) funktio

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ \arctan x, & \text{kun } x < 0? \end{cases}$$

Entä mihin luokkiin $\mathcal{C}^n([-1, 0])$ ne kuuluvat?

Selvitä differentiaaliyhtälöistä

1) $xy'' + 2y \sin x = e^{yx}$, $y(1) = y'(1) = 2$

2) $y' + y \cos(x) = y \sin x$

3) $y'y'' = 1 + y^2$, $y(0) = 2$, $y(1) = 1$

4) $\frac{\partial u}{\partial x} + u = \sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$

5) $\frac{\partial x}{\partial t} = 2x - 3xy$, $\frac{\partial y}{\partial t} = 4xy - 5y$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$

seuraavat asiat (tehtävät 3-4):

3. a) Onko yhtälö tavallinen vai osittaisdifferentiaaliyhtälö?

b) Mikä on yhtälön kertaluku?

c) Onko alkuarvo- tai reuna-arvotehtävä?

4. d) Onko yhtälö normaalimuotoinen?

e) Onko yhtälö lineaarinen?

f) Onko yhtälö autonominen?

5. Muodosta differentiaaliyhtälö, josta voidaan ratkaista ne yhden muuttujan reaaliarvoiset funktiot y , joiden kuvaajakäyrille pätee: *Jokaiseen käyrän pisteeseen piirretyn normaalin kulmakerroin on kyseisen pisteen koordinaattien keskiarvo.*

6. Muunna 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi $y''' = 2y^2y' + 3xy''$.

7. Muodosta differentiaaliyhtälöryhmä (ja sille alkuarvot), jolla on ratkaisuna käyrä

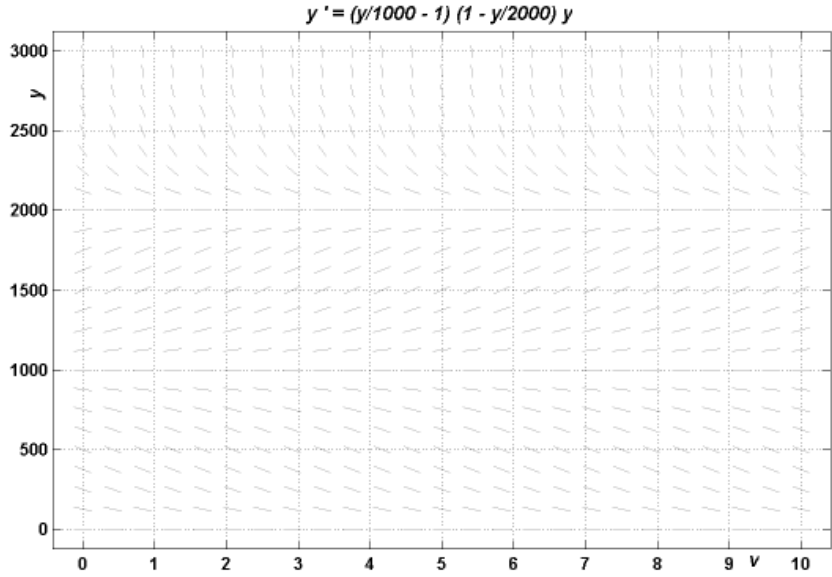
$$\begin{cases} x_1(t) = a(t + \sin t) \\ x_2(t) = a(1 + \cos t) \end{cases}$$

Muunna ryhmä vielä autonomiseksi.

8. Kääntöpuolella.

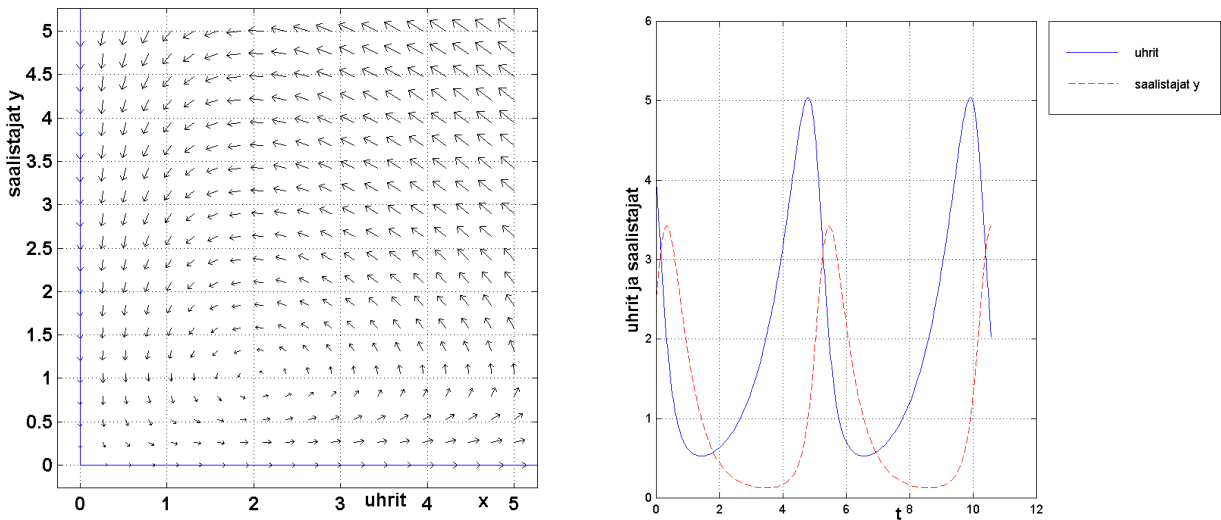
9. Kääntöpuolella.

8. Differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ vakioratkaisua $y = A$ sanotaan *tasapainoratkaisuksi* (*equilibrium*) ja arvoa A *tasapainotilaksi*. Kuvassa 1 erään eliöpopulaation lukumäärää ajan (vuosina) funktiona kuvaavan differentiaaliyhtälön suuntakenttää. Piirrä kenttään useita eri tyyppisiä ratkaisukäyriä ja kuvaile kehitystä eri alkuarvoilla hetkellä 0. Määritä tasapainotilat.



Kuva 1: Eliöpopulaation määrä

9. a) Piirrä Kuvassa 2 vasemmalla olevaan faasipiirrokseen sen viereisessä kuvattua ratkaisuparia vastaava käyrä ja
 b) selvitä, milloin saalistajakanta on suurimmillaan ja paljonko silloin on uhreja.
 c) Kuvaile tilanteen kehittymistä tilasta, jossa uhreja on 300 ja saalistajia 200.
 d) Onko havaittavissa tasapainotiloja (miten se tässä määriteltäisiin)?



Kuva 2: Uhri-saalistaja-malli (satoja yksilöitä)