
Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001

Harjoitus 3

Matematiikan laitos järjestää kotitehtävien ohjausta viikoilla 37-49 (10.9.-5.12.) salissa M9 aikoina ma 14-18, ti 14-18 ja ke 14-16.

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + \frac{1}{x} - x = 0, \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y'(1) = 2.$$

Missä ratkaisu on määritelty?

2. Piirrä tasavälinen suuntakenttä yhtälölle $y' = -2ty^2$ neliöön $[0, 2] \times [0, 2]$ käyttäen väliä 0.5.

3. a) Ratkaise graafisesti (esimerkiksi edellisen suuntakentän avulla)

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1, \tag{1}$$

ja määritä sen avulla likiarvot luvuille

$$y(0.5) \quad y(1) \quad y(1.5) \quad y(2). \tag{2}$$

b) Ratkaise (eksaktisti) alkuarvotehtävä (1) ja laske yo. lukujen (2) tarkat arvot.

4. Laske numeerisesti alkuarvotehtävän (1) avulla

a) Eulerin menetelmällä askelvälinä 0.5

b) Runge-Kutta-menetelmällä askelvälinä 1

taulukot, piirrä vastaavat approksimaatiot ja määritä arviot yo. luvuille (2).

5. Muodosta yhtälön $y' = x - 2y$ isokliinikenttää neliössä $[-3, 3] \times [-3, 3]$ ja kuvaile kvalitatiivisesti ratkaisujen käytöstä.

6. Ratkaise graafisella murtoviivakonstruktiolla alkuarvotehtävät

a) $y' = x - 2y, \quad y(0) = 1,$

b) $y' = x - 2y, \quad y(-3) = 3,$

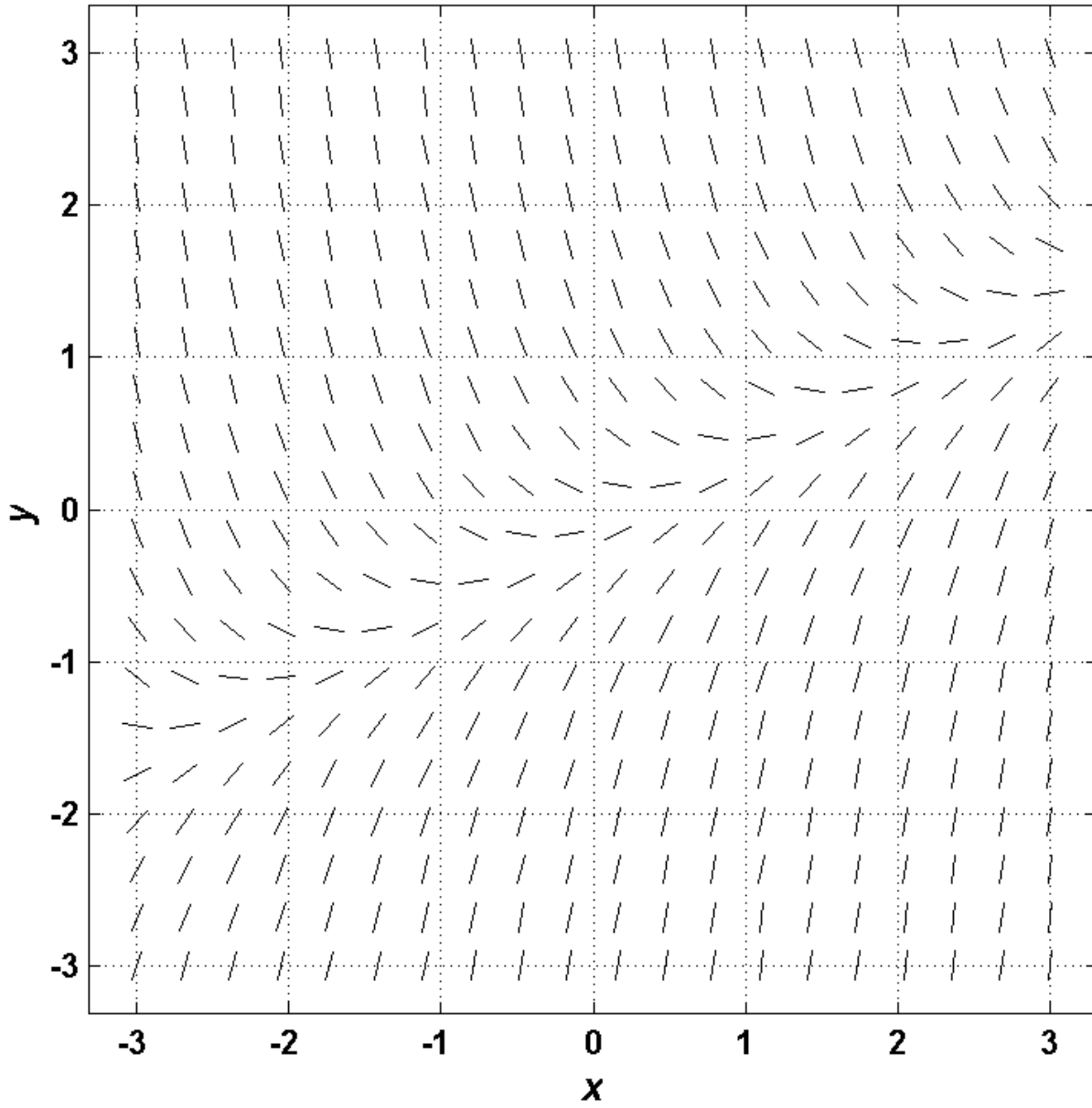
välillä $[-3, 3]$. Miten pieni askelväli näyttäisi näissä johtavan kohtuullisen sievään arvioon (siis ei tule ihme hässäkkää, kuten esim. askelvälillä 1.0)? Yhtälön tasavälistä suuntakenttää kuvassa 1 (kääntöpuolella).

7. Ratkaise luennolla jaetussa (englanninkielisessä) kopiassa oleva tehtävä 1.1#4.

Siinä *slope* = kulmakerroin, *undefined* tarkoittaa yleisesti määrittelemätöntä, tässä arvoja $\pm\infty$. Voit käyttää halutessasi Polkingin DFIELDiä tai muuta vastaavaa, mutta parempi olisi pystyä selviytymään ilman.

Paperin kääntöpuolen Tehtävä 1.1#5 ratkaistaneen myöhemmin.

$$y' = x - 2y$$



Kuva 1: Tehtävässä 6 luvattu suuntakenttä