
Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001

Harjoitus 4

Tiistaina 2.10. ei ole luentoa eikä demoja (liikuntailtapuoli). poikkeuksellisesti emme pidä demoja myöskään keskiviikkoamuna 3.10., mutta torstaiamun ryhmän lisäksi on yksi *korvaava demoryhmä* seuraavan viikon **maanantaina 8.10. klo 14-16 salissa M4**.

Matematiikan laitos järjestää kotitehtävien ohjausta viikoilla 37-49 (10.9.-5.12.) salissa M9 aikoina ma 14-18, ti 14-18 ja ke 14-16.

1. a) Missä tason osa-alueissa ovat olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen ehdot voimassa differentiaaliyhtälölle

$$y' = \frac{1}{y(y-2x)}? \quad (1)$$

- b) Millaisille yhtälöön (1) liittyville alkuarvot tehtäville $y(x_0) = y_0$ OY-lause ei takaa ainakaan yksikäsitteistä ratkaisua?
-

Oletetaan, että tehtävissä 2 ja 3 esiintyvä funktio $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva ja että myös sen osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

2. Olkoot funktiot $y_1(t) = t+2$ ja $y_2(t) = -t^2$ differentiaaliyhtälön $y' = f(t, y)$ ratkaisuja. Mitä voidaan OY-lauseen avulla päätellä pisteen $(0, 1)$ kautta kulkevasta ratkaisusta?
3. Olkoot funktiot

$$y_1(t) = \frac{1}{t-1} \quad \text{ja} \quad y_2(t) = \frac{1}{t-2}$$

differentiaaliyhtälön $y' = f(t, y)$ ratkaisuja. Mitä voidaan OY-lauseen avulla päätellä ratkaisuista, jotka leikkaavat y -akselin

- a) pisteessä -2 ?
- b) välin $[-1, -\frac{1}{2}]$ pisteessä?
-

4. Etsi alkuarvot tehtävälle $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$, ainakin kaksi eri ratkaisua. Miksi yksikäsitteisyyslause ei toimi?
5. Ratkaise OY-lausetta käyttäen alkuarvot tehtävä

$$y' = (y - x^2)^2 + 2x, \quad y(1) = 1.$$

6. Ratkaise reuna-arvot tehtävä $xy' = 3y$, $y(1) = 1$, $y(-1) = 4$.

7. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

a) $y' - y + 3e^{-x} = 0$,

b) $y' = -\frac{y}{x} + 2$.

8. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$y' = \frac{2 - 2ty}{1 + t^2}, \quad y(0) = 2.$$