
Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001

Harjoitus 5

Viikolla 1.-5.10. on vain torstaiamun demot 8-10 M6. Lisäksi on yksi demoryhmä seuraavan viikon **maanantaina 8.10. klo 14-16 salissa M4.**

Matematiikan laitos järjestää kotitehtävien ohjausta viikoilla 37-49 (10.9.-5.12.) salissa M9 aikoina ma 14-18, ti 14-18 ja ke 14-16.

1. Ratkaise integroivaa tekijää käyttäen yhtälöt

a) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\ln x}$.

b) $y' + (y + 1) \sin x = 0$.

2. Ratkaise vakion varioinnilla yhtälö

$$y' + 2xy = 4e^{-x^2}.$$

3. Ratkaise sopivaa polynomiyritettä käyttäen alkuarvotettava

$$y' + 2y = x - 3, \quad y(1) = 2.$$

(Vihje: Jos yo. yhtälöllä on polynomiratkaisu, sen asteen voi päätellä suoraan yhtälöstä.)

4. Ratkaise differentiaaliyhtälöt (a, k, α vakioita)

a) $y' = -aty$, b) $x' = kx^\alpha$, c) $y = (1 - x)y' - 1$.

5. Ratkaise separoimalla differentiaaliyhtälöt

a) $(1 + x^2)y' - 1 - y^2 = 0$

b) $x(1 - t^2)x' + t(1 - x^2) = 0$

6. Ratkaise funktio y yhtälöstä $y(x) = \int_0^x t y(t)^2 dt + 1$.

Vihje: Muodosta alkuarvotettava ja ratkaise se.

7. (vrt. Luvun 1.3 tehtävät 4 ja 5) Oletetaan, että eristetyn populaation kasvunopeus riippuu vain populaation määrästä $P = P(t)$, ts. $P'(t) = f(P(t))$. Määritä populaation määrä hetkellä $t \geq 0$, kun $P(0) = P_0$ ja

a) $f(P) := kP$, missä $k > 0$ on (syntyvyys)vakio.

b) $f(P) := \left(1 - \frac{P}{N}\right) kP$, missä $k > 0$ on kuten yllä ja $N \gg 0$ on populaation ehdoton yläraja.

c) Miten populaation määrä käyttäytyy näissä malleissa, kun $t \rightarrow \infty$?

Yksi tehtävä kääntöpuolella.

8. Alla on kuviot tehtävän 7 molemmista tilanteista arvoilla $k = 0.01$ ja $N = 6000$.

a) Jos populaation määrä oli alussa 1000, niin paljonko se on näissä malleissa 50, 100 ja 200 aikayksikön päästä? Arvioi kuviosta sekä laske tehtävän 7 tuloksesi mukaan.

b) Kuinka P' muuttuu ajan mukana?

