
Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001

Harjoitus 6

Matematiikan laitos järjestää kotitehtävien ohjausta viikoilla 37-49 (10.9.-5.12.) salissa M9 aikoina ma 14-18, ti 14-18 ja ke 14-16.

1. Määritä ne tasoalueet, joissa seuraavat differentiaaliyhtälöt ovat eksakteja:

a) $2xy + (1 + y^2)y' = 0$,

b) $2x + 4y + (4x - 2y + x^2)y' = 0$,

c) $xe^{xy} + ye^{xy}y' = 0$,

d) $(\frac{y}{x} - x^2) + (\ln x - 2y)y' = 0$.

2. Ratkaise tehtävän 1 yhtälöistä ne, jotka ovat eksakteja.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{xy - 1}{x^2y} - \frac{y'}{xy^2} = 0.$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

5. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2, & y_1(0) = 3 \\ y_2' = 2y_1 - y_2, & y_2(0) = 1 \end{cases}$$

6. Radioaktiivisen aineen hajoamisnopeus on suoraan verrannollinen jäljellä olevaan ainemäärään $m(t)$. Muodosta aluksi hajoamisen differentiaaliyhtälö ja ratkaise se alkuehdolla $m(0) = m_0 > 0$. Erään aineen havaittiin vähentyneen 24 tunnissa noin 10 %. Laske aineen *puoliintumisaika*, ts. aika, jossa aineen määrä on vähentynyt puoleen alkuperäisestä.

7. Vesiastian pohjaan tehdään (hetkellä $t = 0$) pieni reikä, josta vesi pääsee valumaan pois. Astiassa olevan veden korkeudelle $h(t)$ hetkellä $t \geq 0$ (tyhjenemiseen saakka) voidaan johtaa – fysikaalisesti kylläkin idealisoitu – differentiaaliyhtälö $h' = -K\sqrt{h}$, missä vakio $K > 0$ riippuu astian ja reiän mitoista.

a) Ratkaise differentiaaliyhtälö.

b) Hahmottele ratkaisuparvea ja piirrä ratkaisukäyrä alkuehdolla $h(0) = h_0 > 0$.

8. a) Milloin on edellisen mallin mukaan astian tyhjenemishetki T ja miten ratkaisukäyrän pitää jatkua hetken T jälkeen?

b) Mikä oleellinen ero tilanteella on verrattuna radioaktiivisen aineen hajoamiseen?

c) Mitä voi tyhjenemistapahtumasta päätellä henkilö, joka saapuu paikalle astian ja tyhjenyttyä?