Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001
Harjoitus 8 (viikolla 44, 30.10.-1.11)

Sopimuksemme mukaan I välikoe on 2.11.2001 klo 8-10 salissa M1. Tähän ilmoittautuminen tapahtuu demojen 7 yhteydessä tai sähköpostilla. Muille koe on alkuperäisen ohjelman mukaisesti 14.11.2001 klo 8-10 M1. Koealue: Luennot Lukuun 3.6 saakka (asiat demoissa 1-8). Kääntöpuolella kertaustehtäviä.
Tiistaina 30.10. ei luentoa ole, keskiviikkona kertausta.
Viikolle 45 (5.-9.11.) ei kotilaskuja, mutta on tietokonedemot ke 12-14 M17 ja to 8-10 M18.

1. *Todista Lause 3.4.2:* Olkoot p ja q välillä Δ jatkuvia funktioita. Jos y_L on yhtälön
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$
yksi ratkaisu välillä Δ, on funktio y sen ratkaisu jos ja vain jos y on muotoa $y = y_L + y_H$, missä y_H on homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ratkaisu kyseisellä välillä.

2. Muodostavatko funktiot $y_1(x) := e^x$ ja $y_2(x) := (x+1)e^x$ yhtälön $y'' - 2y' + y = 0$ perusjärjestelmän?

3. Määritä kertaluvun pudotusta (Luku 3.6) käyttäen differentiaaliyhtälön
$$x^2y'' - 2y = 0, \quad x > 0,$$
ratkaisut, kun tiedetään, että yksi ratkaisu on $y_1(x) = 1/x$.

4. a) Osoita, että homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ lineaarisesti riippumattomilla ratkaisuilla ei ole yhteisiä nollakohtia (*Apulause 3.5.10*).

   b) Voivatko funktiot y_1, $y_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$y_1(x) := \sin 2x, \qquad y_2(x) := \cos 3x,$$
   olla saman homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ratkaisuja?

5. Ovatko funktiot y_1, y_2,
$$y_1(x) := x, \qquad y_2(x) := x^2 - 1,$$
saman 2. kertaluvun lineaarisen homogeeniyhtälön ratkaisuja?

6. Osoita, että $u(x) := \sin(1/x)$ on differentiaaliyhtälön
$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^4}y = 0$$
ratkaisu positiivisella reaaliakselilla ja etsi täydellinen ratkaisu.

7. Tarkastellaan yhtälöä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, p, $q \in \mathcal{C}(\Delta)$. Osoita, että yhtälöllä on ratkaisu

   a) $y(x) = x$, jos $p(x) + xq(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$,

   b) $y(x) = e^x$, jos $p(x) + q(x) + 1 = 0$ kaikilla $x \in \Delta$.

8. Ratkaise tehtävän 7 avulla differentiaaliyhtälö
$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0, \quad x > 0.$$

Seuraavassa tehtäviä kokeeseen harjoitteluun:

1. Ratkaise:

	YHTÄLÖ	RATKAISU ($C, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$)
a)	$y' - 3y = 6$	$y = Ce^{3x} - 2$
b)	$y' + \frac{4y}{x} = x^4$	$y = C\frac{1}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$
c)	$xy' - 2y = x^3 \cos 4x$	$y = \frac{1}{4}x^2 \sin 4x + Cx^2$
d)	$y' - 5y = 0,\ y(3) = 4$	$y = 4e^{5(x-3)}$
e)	$y' + \frac{1}{2}xy = 3x,\ y(0) = 4$	$y = 6 - 2e^{-x^2/4}$
f)	$x - y^2 y' = 0$	$y = (\frac{3}{2}x^2 - 3C)^{1/3}$
g)	$(y^2+1)(x+1)y' = (y^3+3y)$	$y^3 + 3y = C(x+1)^3$, $C \neq 0$
h)	$y' - xe^y = 0$	$y = -\ln(-C - \frac{1}{2}x^2)$
i)	$2xy + (1+x^2)y' = 0,\ y(2) = 3$	$y = \frac{15}{x^2+1}$
j)	$x + \sin y + (x\cos y - 2y)y' = 0,\ y(2) = \pi$	$\frac{1}{2}x^2 + x\sin y - y^2 = 2 - \pi^2$
k)	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = -y_1 - 3y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 = -c_1e^{-2t} - 4c_2e^t \\ y_2 = c_1e^{-2t} + c_2e^t \end{cases}$
l)	$y'' = x^2e^x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$	$y = (x^2 - 4x + 6)e^x - ex + 1 - 2e$
m)	$xy'' + y' = 0$	$y = C_1 \ln\lvert x\rvert + C_2$
n)	$y'' + (y')^2 = 1$	$\begin{cases} y = \ln\lvert C_1e^x + e^{-x}\rvert + C_2,\ C_1 \neq 0, \\ y = \pm x + C_2 \end{cases}$
o)	$y'' = (y')^3 + y'$	$y = \overline{\text{arc}}\sin(C_2e^x) + C_1$
p)	$y'' = 2yy',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	$y = \tan(x + n\pi),\ n \in \mathbf{Z}$

Yllä loppupuolella tee sopivat apusijoitukset $y' = z$. Ratkaisuparvet (oikeatkin) voivat eri tavoilla saatuina näyttää hyvinkin erilaisilta!

2. Minkä differentiaaliyhtälöiden ratkaisuparvia ovat

a) $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x), \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$?

b) $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$?

c) $y(x) = x + C_1\ln x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$?

3. Ovatko funktiot $y_1,\ y_2 :]1, \infty[\to \mathbf{R}$,

$$y_1(x) := (\ln x)^{(\ln x)}, \qquad y_2(x) := 2x^{\ln(\ln x)},$$

lineaarisesti riippuvat?

Vastaus: Ovat.

4. Oletetaan, että yhtälöllä $xy'' - 2y' + y = 0$, $x > 0$, on ratkaisut y_1 ja y_2, joille

$$y_1(2) = 1,\ y_1'(2) = y_2(2) = 2 \text{ ja } y_2'(2) = 3.$$

Määritä funktio W_{y_1,y_2}. Ovatko y_1 ja y_2 yhtälön perusjärjestelmä?

Vastaus: Ovat, sillä $W_{y_1,y_2}(x) = -\frac{1}{4}x^2 \neq 0$ välillä $\mathbf{R}_+$.