Differentiaaliyhtälöt, syksy 2001
Harjoitus 14 (viikolla 50, torstaina 13.12. klo 10-12 salissa M3)

Keskiviikkona 5.12. ei ole luentoa, eikä myöskään tiistaina 11.12. Viimeiset luennot ovat siis tiistaina 4.12. ja keskiviikkona 12.12. Tarvitaanko kertausluento?
Viimeiset demot 14 ovat yhdessä ryhmässä torstaina 13.12. klo 10-12 salissa M3.
2. välikoe on 20.12., ja siihen tulee monisteen ja luentojen luvut 3.7-10, 4.2-10 ja 5.1-2. Laplace-muunnoksia syventävät lisäluvut 4.8-4.10 jaetaan luennoilla.
Kokeessa **pitää** olla mukana henkilöyden todistava asiakirja (ajokortti tms.). Kokeessa **saa** olla mukana kirjoitusvälineet ja laskin, tehtäväpaperi sisältää Laplace-muunnostaulukon.

---

1. Muodosta Picardin iterointimenetelmällä peräkkäiset approksimaatiot y_0, y_1 ja y_2 alkuarvotehtävän
$$y' = -\frac{1}{2}xy, \quad y(0) = 3,$$
ratkaisulle.

   Vastaus: $y_0 = 3$, $y_1 = 3 - \frac{3}{4}x^2$, $y_2 = 3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{32}x^4$.

2. Etsi myös tehtävän 1 oikea ratkaisu ja piirrä kaikki samaan koordinaatistoon (esim. välillä [-5,5]).

3. Toteuttaako funktio f, $f(x,y) := 3x\sqrt{y}$, Lipschitz-ehdon muuttujan y suhteen

   a) joukossa $[-2,2] \times [0,1]$?

   b) joukossa $[-2,2] \times [1/2,1]$?

   c) joukossa $[-2,2] \times [1/2,\infty[$?

4. Osoita, että alkuarvotehtävällä
$$y' = -y, \quad y(0) = 3$$
on yksikäsitteinen ratkaisu eräässä pisteen 0 ympäristössä.

5. Mikä on edellisessä tehtävässä laajin väli $]-\delta,\delta[$, jolla kyseisen ratkaisun olemassaolo on **OY-lauseen 5.2.2 mukaan** taattu?

   Vihje: ota tarkasteluun $(0,3)$-keskinen suorakulmio T ja päättele, kuinka suuri δ voi olla.

6. Muodosta Picardin iterointimenetelmällä peräkkäiset approksimaatiot $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ alkuarvotehtävän
$$y' = -y, \quad y(0) = 3$$
ratkaisulle ja selvitä niiden avulla oikea ratkaisu.

Kääntöpuolella kertausharjoitustehtäviä vastauksineen.

Kertausharjoitustehtäviä vastauksineen

1. Ratkaise alku- tai reuna-arvotehtävät

   a) $x'' - 8x' + 16x = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = -2$,

   b) $y'' + 8y' + 25y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$,

   c) $2z'' - 5z' + 2z = 0$, $z(0) = 1$, $z'(0) = -1$.

   Vastaukset (laskettu Maplella):

   $x(t) = \exp(4t) - (\exp(4) + 2)\, t \exp(4t)/\exp(4)$

   $y(t) = \exp(-4t)\cos(3t) + 5/3 \exp(-4t)\sin(3t)$

   $z(t) = -\exp(2t) + 2\exp(1/2\, t)$

2. Ratkaise
$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}.$$
   Vastaus: $y = (c_1 + c_2x)e^{3x} - (1 + \ln|x|)e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = x^2.$$
   Vastaus: $y(x) = c_1e^{-\frac{5}{2}x} + c_2xe^{-\frac{5}{2}x} + \frac{4}{25}x^2 - \frac{32}{125}x + \frac{96}{625}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

4. Onko funktiojoukko $\{x^2 + \sin x, x^2 - \sin x, x^2 - 1, x^2 + x\}$ lineaarisesti riippuva?

   Vastaus: Ei. Nähdään määritelmän avulla tai Wronskin determinantilla (sen arvo esimerkiksi nollassa $= -4$).

5. Todenna, että funktio y_1, $y_1(x) := x$, on eräs yhtälön
$$(x^3 \sin x)y''' - (3x^2 \sin x + x^3 \cos x)y'' + (6x \sin x + 2x^2 \cos x)y' - (6 \sin x + 2x \cos x)y = 0$$
   ratkaisu ja ratkaise yhtälö.

   Vastaus: $y(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x \sin x$, $c_i \in \mathbf{R}$.

6. Mitkä ovat sen alinta mahdollista kertalukua olevan lineaarisen homogeenisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön muut ratkaisut, jolla on ainakin ratkaisut xe^{-3x} ja $x \sin x \cos x$?

   Vastaus: $y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x} + c_3 \sin 2x + c_4x \sin 2x + c_5 \cos 2x + c_6x \cos 2x$, $c_i \in \mathbf{R}$.

7. Ratkaise yhtälö
$$y^{(5)} - 6y^{(4)} - 8y''' + 48y'' + 16y' - 96y = 0.$$
   Vastaus: $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-2x} + c_4xe^{-2x} + c_5e^{6x}$, $c_i \in \mathbf{R}$.

8. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla alkuarvotehtävä
$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = y''(0) = 1, \; y'(0) = y'''(0) = 0.$$
   Vastaus: $y(x) = \cosh x$.