

## 1.5 Moivre'n kaava.

Olkoon  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Silloin

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Jos valitaan  $r = 1$ , jolloin  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , saadaan ns. *Moivre'n kaava*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Tämä on kätevä moninkertaisten kulmien sinien ja kosinien laskemiseen. Valitaan esim.  $n = 5$ .

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Kuva 8: Pascalin kolmio

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \cos 5\varphi &= \operatorname{Re} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 \\ &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 5\varphi &= \operatorname{Im} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 \\ &= \sin^5 \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Näitä voidaan vielä muokata eri muotoihin. Sijoitetaan esimerkiksi ensimmäiseen  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$  :

$$\begin{aligned} \cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + 5 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)^2 \\ &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi + 10 \cos^5 \varphi + 5 \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ &= 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \operatorname{Re} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\ &= \operatorname{Re} (\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi) \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Tästä seuraa esimerkiksi kaava

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi.$$

Unohtuneet kaavat on helppo johtaa:

Koska

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 \\ &= \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\ \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

## 1.6 Eulerin kaava.

Jos  $x \in \mathbb{R}$ , niin

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i\end{aligned}$$

jne.

Sijoitetaan  $e^x$ :n sarjakehitelmään  $x = i\varphi$ . Silloin

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \dots \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi, \end{aligned}$$

joten olemme saaneet ns. *Eulerin kaavan*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Tämän perusteella kompleksiluvuilla  $z$ ,  $\arg z = \varphi$ ,  $|z| = r$ , on esitys

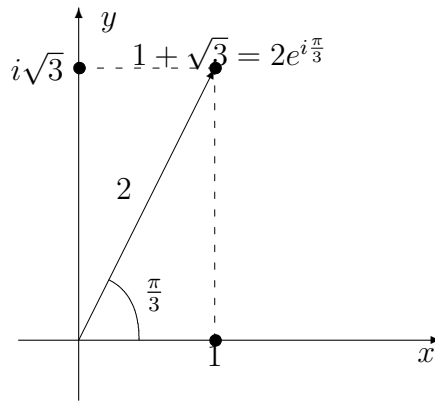
$$z = re^{i\varphi}.$$

Moivren kaava saa muodon

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

## 1.7 Esimerkkejä.

1. Laske  $(1 + i\sqrt{3})^6$  Moivren kaavan avulla. Kuvan 9 perusteella on



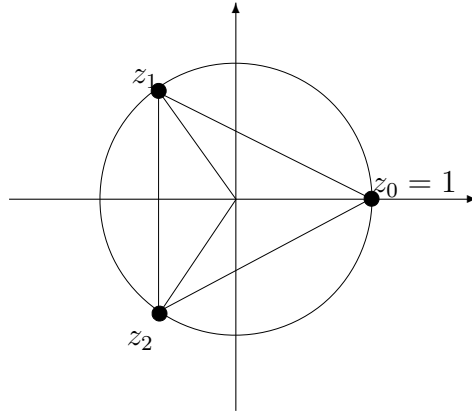
Kuva 9:

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 2^6 e^{2\pi i} = 64.$$

2. Ratkaise yhtälö  $z^3 = 1$ .

Merkitään  $z = re^{i\varphi}$ . Silloin  $z^3 = r^3 e^{3i\varphi}$ . Koska  $|e^{3i\varphi}| = 1$ , on

$$\begin{aligned} |z|^3 &= r^3 |e^{3i\varphi}| = r^3 = 1 \Leftrightarrow r = 1. \\ z^3 = 1 &\Leftrightarrow r = 1 \text{ ja } e^{3i\varphi} = 1 = e^{n2\pi i}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ z^3 = 1 &\Leftrightarrow \varphi = n\frac{2}{3}\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$



Kuva 10: Yhtälön  $z^3 = 1$  ratkaisut

$$z_1 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tarkastus:

$$\begin{aligned} z_1^3 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} + 3i\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1 \\ z_2^3 &= (\bar{z}_1)^3 = \overline{(z_1^3)} = \bar{1} = 1. \end{aligned}$$

Yleisesti ottaen binomiyhtälön

$$z^n = 1$$

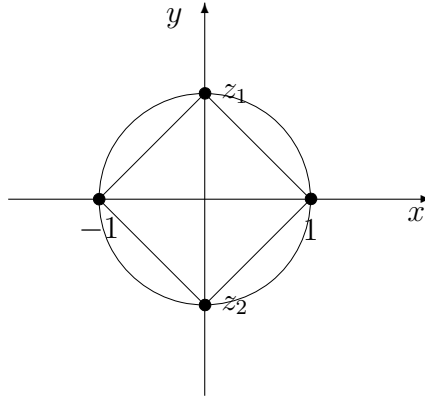
juuret ovat yksikköympyrän kehällä. Ne sijaitsevat säännöllisen  $n$ -kulmion kärjissä, jonka yksi kärki on pisteessä 1.

3. Ratkaise yhtälö  $z^4 = 1$ .

Piirretään yksikköympyrä ja sen sisään neliö, jonka yksi kärki on pisteessä  $z = 1$ .

Juuret ovat neliön kärjissä:

$$z_1 = 1$$



Kuva 11: Yhtälön  $z^4 = 1$  ratkaisut

$$\begin{aligned} z_2 &= i \\ z_3 &= -1 \\ z_4 &= -i. \end{aligned}$$

4. Laske  $e^{i\pi}$ .

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

## 1.8 Binomiyhtälö

Yleisellä binomiyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä

$$z^n = w,$$

missä  $z$  on tuntematon ja  $w$  annettu kompleksiluku. Edellä käsiteltiin muotoa

$$z^n = 1 \tag{1}$$

olevia erikoistapauksia. Jos merkitään  $z = re^{i\varphi}$ , saadaan (1) muotoon

$$r^n e^{in\varphi} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r &= 1 \\ n\varphi &= k2\pi. \end{cases}$$

Yhtälön (1) juuret ovat siis

$$z_k : \begin{cases} r &= 1 \\ \varphi &= k\frac{2\pi}{n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Kun  $k = 0$ , saadaan triviaali juuri  $z_0 = 1$ .

Kun  $k = 1$ , saadaan niin sanottu  $n$ :s yksikköjuuri

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

jolle käytetään merkintää  $\varepsilon_n$ . Koska

$$\varepsilon_n^k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = z_k,$$

voidaan muut (1):n juuret esittää  $\varepsilon_n$ :n potensseina, ja kaikki  $\varepsilon_n$ :n potenssit ovat (1):n juuria.

Yhtälöllä (1) on täsmälleen niin monta juurta kuin  $\varepsilon_n$ :llä on eri potenssia. Nämä ovat

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^0 &= 1 \\ \varepsilon_n^1 &= \varepsilon_n \\ \varepsilon_n^2 & \\ &\vdots \\ \varepsilon_n^{n-1} & \end{aligned}$$

sillä

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^n &= e^{in\frac{2\pi}{n}} = e^{2\pi i} = 1 \\ \varepsilon_n^{n+1} &= \varepsilon_n \\ \varepsilon_n^{n+2} &= \varepsilon_n^2 \text{ jne.} \end{aligned}$$

(Kun lasketaan luvuilla  $\varepsilon_n^k$ , joiden moduli =1, on kertolasku pelkkää argumenttien yhteenlaskua.)

Binomiyhtälöllä (1) on täsmälleen  $n$  kpl eri juurta. Nämä sijaitsevat kompleksitasossa sen säännöllisen  $n$ -kulmion kärjissä, jonka yksi kärki on pisteessä  $z = 1$  ja keskipiste on origossa (Kuva 12).

**Esimerkki.** Olkoon  $a$  yhtälön

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \tag{2}$$

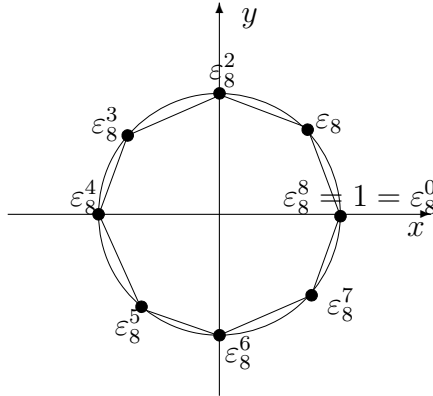
juuri. Osoita, että myös  $a^2$  on yhtälön juuri.

Ratkaisu: Koska

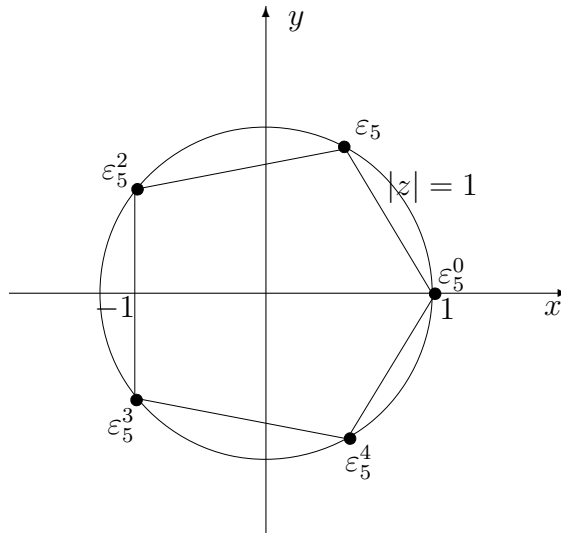
$$1 - z^5 = (1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$

ja  $z = 1$  ei ole (2):n juuri, on

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \Leftrightarrow z^5 = 1, z \neq 1.$$



Kuva 12: Yhtälön  $z^8 = 1$  ratkaisut



Kuva 13: Yhtälön  $z^5 = 1$  ratkaisut

Näin ollen  $a = \varepsilon_5^k$  jollakin  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Tällöin  $a^2 \neq 1$ . Toisaalta  $a^2 = \varepsilon_5^{2k}$  on yhtälön  $z^5 = 1$  juuri. Siis  $a^2$  on (2):n juuri.

Sama tehtävä ei onnistu, jos astelukua nostetaan yhdellä:

$$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)(1 - z) = 1 - z^6.$$

$a = -1$  on yhtälön  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$  juuri, mutta  $a^2 = 1$  ei ole.

Siirrymme nyt yleiseen binomiyhtälöön

$$z^n = w = \rho e^{i\psi}, \quad \psi > 0. \quad (3)$$

Sijoituksella  $z = r e^{i\varphi}$  saadaan

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\psi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \psi + k2\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Yhtälöllä (3) on juuret

$$z_k : \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \frac{\psi}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Merkitään

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\psi}{n}}.$$

Silloin muut juuret ovat

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 \varepsilon_n \\ z_2 &= z_0 \varepsilon_n^2 \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= z_0 \varepsilon_n^{n-1} \end{aligned}$$

Juuret  $z_0, \dots, z_{n-1}$  sijaitsevat sen säännöllisen  $n$ -kulmion kärjissä, jonka yksi kärki on pisteessä  $z_0$  ja keskipiste on origossa (kuva 14).

**Esimerkki.** Yhtälön  $z^4 = -1 = e^{i\pi}$  juuret ovat (kuva 15)

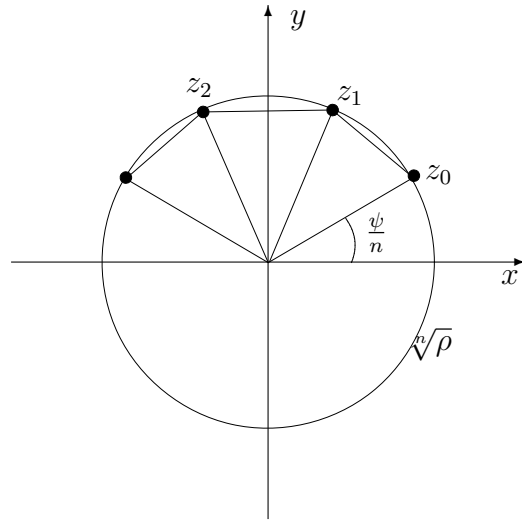
$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

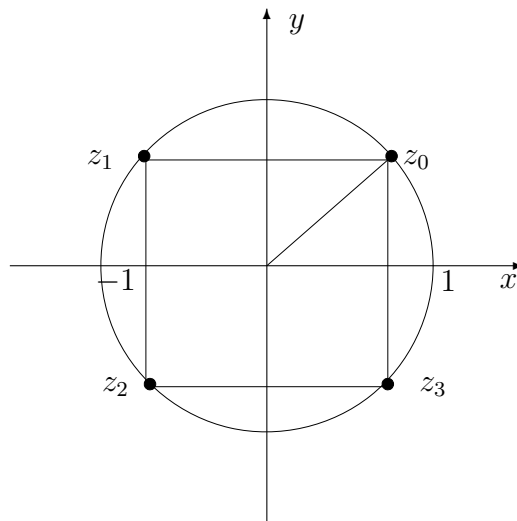
$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

eli  $z_2 = -z_0$ ,  $z_3 = \overline{z_0}$ , ja  $z_1 = -\overline{z_0}$ .



Kuva 14: Yleisen binomiyhtälön juuret



Kuva 15: Yhtälön  $z^4 = -1$  juuret