Kompleksiluvuista

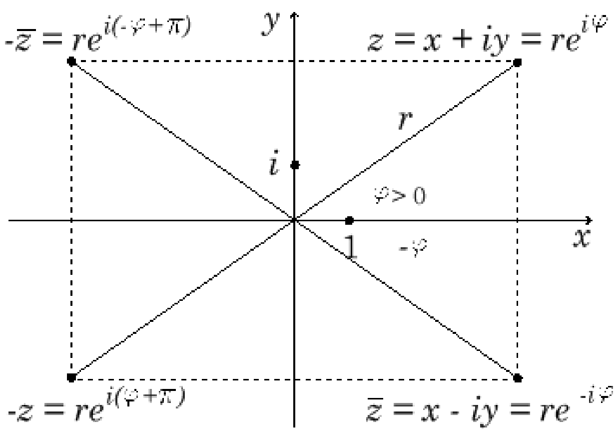
Kompleksiluvuilla laajennetaan reaalilukujen joukkoa niin, että polynomiyhtälöt saavat ratkaisuja.

Jo toisen asteen polynomiyhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole reaalista ratkaisua, joten otetaan käyttöön nk. *imaginaariyksikkö* i, jolle on

$$i^2 = -1$$

ja siten voidaan kirjoittaa $i = \sqrt{-1}$. Silloin $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ jne.

Imaginaariyksikkö tuo lukujen joukkoon uuden ulottuvuuden, jota voidaan kuvata tasona, jossa vaaka-akseliksi valitaan reaalilukusuora ja pystyakseliksi puhtaat imaginaariluvut, yksikkönä i pisteeseen $(0, 1)$.



Kuva 1: Kompleksilukuja tasossa

Kompleksiluku $z = x + iy$ voidaan samaistaa euklidisen xy-tason pisteen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kanssa; $x + iy \simeq (x, y)$. Lineaariavaruudeksi tulkitun avaruuden $\mathbb{C}$ kannan muodostavat vektorit $1 \simeq (1, 0)$ ja $i \simeq (0, 1)$, jolloin

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i \simeq x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y).$$

Lause 0.0.1 (algebran peruslause) Jokaisella kompleksimuuttujan k. asteen polynomiyhtälöllä $P_k(z) = 0$ on kompleksitasossa k kappaletta juuria, kun useampikertaiset juuret lasketaan kertalukunsa mukaan.