Nollalla jakaminen

No mitä olisikaan vaikkapa $\frac{2}{0}$?
Asialle ei ole yksiselitteistä tuomiota; salliminen ja tulkinta riippuvat asiayhteydestä. Nolla jaettuna nollalla ei kuitenkaan ole mitään - paitsi ehkä raja-arvoina (L'Hospitalin sääntö!).
1. Jos nollalla jakamiselle olisi jokin standardi, niin joudumme vaikeuksiin aritmetiikan ja algebran perusideoiden kanssa: algebrassa laskutoimituksen pitäisi olla sellainen, että tulosta voi "uusiokäyttää" jatkolaskuissa.
Jos ilmauksen $\frac{2}{0}$ pitää olla luku, johon voisimme esimerkiksi lisätä luvun 1, niin olkoonpa osamäärä

$$\frac{2}{0} = a.$$

Jakolaskun taustallahan on kertolasku, ja nyt pitäisi olla $a \cdot 0 = 2$. Mutta luku kertaa 0 on toisaalta 0, eli olisi $0 = 2$.
2. Joissakin tarkoin rajatuissa yhteyksissä nollalla jakaminen tulee kysymykseen, silloin otetaan käyttöön reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ tai kompleksilukujen joukon $\mathbb{C}$ laajennuksia. Reaalitapauksessa joukkoon $\mathbb{R}$ lisätään $-\infty$ ja $+\infty$, tätä kutsutaan laajennetuksi reaalilukujen joukoksi tai sen kompaktifioinniksi

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Silloin nollasta poikkeavan luvun jakaminen nollalla tuottaa osoittajan etumerkistä riippuvan äärettömän.
3. Koska kompleksilukujen joukossa ei ole reaalilukujen joukon suuruusjärjestyksen kanssa yhteensopivaa järjestystä, on järkevää käyttää vain yhtä ääretöntä ∞, joka siis saadaan jakamalla nollasta poikkeavia kompleksilukuja nollalla. Näin saadaan nk. Riemannin pallo

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Lopuksi: äärettömien aritmetiikka on vekkulia, puhumattakaan kaikista erikokoisista äärettömistä!