
Differentiaaliyhtälöt
Syksy 2007
Harjoitus 1

1. Totea sijoittamalla, että funktio $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on differentiaaliyhtälön

$$y' + 2xy^2 = 0$$

eräs ratkaisu.

2. Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden kaikki ratkaisut joukossa $\mathbb{R}$.

(a) $y' = e^{3x} + \sin x$,

(b) $y^{(k)} = 0$, missä $k \in \mathbb{N}$.

3. Differentiaaliyhtälöön $y'' = 3x + 1$ liittyen etsi

(a) kaikki välillä $[0, 1]$ määriteltyt ratkaisut,

(b) ratkaisu y joka toteuttaa alkuarvot $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4. Olkoon $P(t)$ pupujussien populaatiota kuvaava ajan t funktio, joka oletetaan jatkuvaksi ja derivoituvaksi. Kun syntyvyys ja kuolevuus oletetaan vakioiksi, niin populaation muutos ajan muutoksen suhteen on suoraan verrannollinen populaation kokoon. Toisin sanoen,

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

missä k on suhdevakio. Ratkaise ko. yhtälö

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' = -6xy; \quad y(0) = -7.$$

6. Määritelmään perustuen osoita, että funktiot f ja g ovat lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{R}$, kun

(a) $f(x) = e^x$ ja $g(x) = xe^x$,

(b) $f(x) = x + 1$ ja $g(x) = x^2$.

7. Osoita, että funktiot $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ ovat yhtälön

$$y'' + y = 0 \tag{1}$$

lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja joukossa $\mathbb{R}$. Toisin sanoen, osoita, että funktiot f ja g ovat lineaarisesti riippumattomia, ja että ne ovat myös yhtälön (1) ratkaisuja.

8. Ratkaise yhtälöt

(a) $y'' = e^{3x} + \sin^2 x$,

(b) $y' = 1 + y^2$,

(c) $y' = -\frac{y}{x}$.