

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y^{(16)} - y^{(15)} = 0 \quad (1)$$

sijoittamalla $g = y^{(15)}$ ja täten muuntamalla yhtälön ensin 1. kertaluvun lineaariseksi yhtälöksi. Kirjoita yhtälön (1) lineaarisesti riippumattomat ratkaisut (16 kpl) ilman perusteluja.

2. Olkoon y_L eräs ratkaisu yhtälölle

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \quad r \not\equiv 0. \quad (2)$$

Osoita, että $y = Cy_L$ yhtälön (2) ratkaisu jos ja vain jos $C = 1$.

3. Olkoon y eräs ratkaisu yhtälölle $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Osoita, että tällöin funktio $w = -\frac{y'}{y}$ on Riccatin yhtälön $w' - w^2 - p(x)w = -q(x)$ eräs ratkaisu.

4. Analyysin Peruslausetta apuna käyttäen laske $f'(x)$, kun

$$(a) \ f(x) = \int_1^{x^2} \cos t \, dt, \quad (b) \ f(x) = \int_x^5 3t \sin t \, dt.$$

Vinkki: Tee sijoitus $u = x^2$ kohdassa (a) ja sen jälkeen sovelta ketjusääntöä $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$. Kohdassa (b) tarvitaan erästä integraalien perusominaisuutta.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = x^2 \cos x$.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

Vinkki: Derivointi otetaan apumuuttujan, esim. t , suhteen.

7. Sijoittamalla yrite

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

yhtälöön

$$xy' + y = 0$$

osoita, että ainoa ym. tyyppiä oleva sarjaratkaisu on triviaaliratkaisu $y(x) \equiv 0$.

Selitys: Yhtälön ratkaisuilla on singulariteetti origossa. Vihjeen tästä saa jo kirjoittamalla annetun yhtälön muodossa

$$y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

Siten origokeskisen potenssisarjan suppenemissäde on oltava nolla. Yhtälöllä on kyllä ratkaisuja origon ulkopuolella. Näiden löytämiseksi sarjamentelmällä täytyisi ottaa potenssisarjayrite, jonka keskipiste on $x_0 \neq 0$. Tällaisen sarjan suppenemissäteeksi saataisiin $|x_0|$, eli origon ja pisteen x_0 välinen etäisyys (=lyhin etäisyys singulariteetista).

8. Selvitä differentiaaliyhtälöistä

a) $xy'' + 2y \sin x = e^{xy}; \quad y(1) = y'(1) = 2$

b) $y' + y \cos x = y \sin x$

c) $y'y'' = 1 + y^2; \quad y(0) = 2, y(1) = 1$

d) $\frac{\partial u}{\partial x} + xu = \sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$

e) $\frac{dx}{dt} = 2x - 3xy, \quad \frac{dy}{dt} = 4xy - 5y; \quad x(1) = 1, y(1) = 0$

seuraavat asiat: Onko yhtälö tavallinen vai osittaisdifferentiaaliyhtälö? Mikä on yhtälön kertaluku? Onko kyseessä alkuarvo- vai reuna-arvotehtävä?

Voit kirjoittaa vastauksesi seuraavaan taulukkoon:

Yhtälö	a	b	c	d	e
Tavallinen/osittais					
Kertaluku					
Alkuarvo/reuna-arvo					