
Differentiaaliyhtälöt
Syksy 2007
Harjoitus 3

1. Selvitä Laskuharjoitusten 2 tehtävän 8 yhtälöistä a)–e) edelleen seuraavat asiat: Onko yhtälö normaalimuotoinen, lineaarinen tai autonominen?

Yhtälö	a	b	c	d	e
Normaalimuotoinen					
Lineaarinen					
Autonominen					

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + \frac{1}{x} - x = 0; \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y'(1) = 2,$$

ja laske tarkka arvo luvulle $y(2)$. Missä ratkaisu y on määritelty?

3. Selvitä, miltä differentiaaliyhtälön

$$y' = -\frac{y^2}{x^2}$$

isokliinikenttä näyttää. Hahmoittele isokliinikentän avulla pisteen $(1, 1)$ kautta kulkevan ratkaisun kuvaajaa. Kuinka yhtälön avulla voidaan suoraan päätellä, että ratkaisut ovat väheneviä funktioita, kun $xy \neq 0$?

4. Anna parannettua Eulerin menetelmää käyttäen arvio luvulle $y(2)$, missä y on alkuarvotehtävän

$$y' = -2xy^2; \quad y(0) = 1, \tag{1}$$

ratkaisu. Valitse askelväliksi $h = 0.5$.

5. Anna Runge-Kutta-menetelmää käyttäen arvio luvulle $y(2)$, missä y on alkuarvotehtävän (1) ratkaisu. Valitse askelväliksi $h = 1$.

6. Ratkaise alkuarvotehtävä (1) separoimalla muuttujat. Laske tämän jälkeen luvun $y(2)$ tarkka arvo.

Tehtävät 7–8 ratkaistaan MAPLE[®]-ohjelmiston avulla, joka löytyy ainakin tietokone-luokan M15 koneilta. Laskuharjoituksissa on esitettävä paperituloste MAPLE-istunnosta, mikäli haluaa suoritusmerkinnän Tehtävistä 7–8. Help-valikon avulla voit tutkia tarvittavien komentojen käyttöä.

7. Komentoa *dsolve* käyttäen ratkaise differentiaaliyhtälöt

a) $(y')^2 + xy' - y = 0,$

b) $y' = (y - 1)(y - 2).$

Totea laskemalla/sijoittamalla (käsin tai tietokoneella), että MAPLE:n antamat ratkaisut ovat todellakin annettujen differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja.

8. Komentoa *dfieldplot* käyttäen piirrä differentiaaliyhtälöiden

a) $y' = -2xy^2$

b) $y' = 1 - \frac{1}{x + y}$

suuntakentät katseluikkunassa $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Kohdan (b) suuntakentässä on suoran $y = -x$ kohdalla pystysuorat tangentit (suunta-alkiot). Miksi?