
Differentiaaliyhtälöt**Syksy 2007****Harjoitus 4**

1. Osoita laskemalla, että funktiot $y_1(x) = 1$ ja $y_2(x) = \cos x$ ovat alkuarvotehtävän

$$y' + \sqrt{1 - y^2} = 0; \quad y(0) = 1,$$

ratkaisuja. Miksi yksikäsitteisyyslause ei toimi?

2. Etsi alkuarvotehtävälle

$$y' = y^{\frac{2}{3}}; \quad y(0) = 0,$$

ainakin kaksi eri ratkaisua. Miksi yksikäsitteisyyslause ei toimi?

3. Ratkaise OY-lausetta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y' = (y - x^2)^2 + 2x; \quad y(1) = 1.$$

Opastus: Yritä ensin löytää arvaamalla eräs ratkaisu.

4. Tutki ensimmäisen kertaluvun lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\ln x}. \tag{1}$$

- a) Määrä ne reaalityöväli, joilla kerroinfunktiot $p(x) = -\frac{1}{x}$ ja $q(x) = \frac{1}{\ln x}$ ovat samanaikaisesti jatkuvia.
b) Osoita Seurauksen 2.2.5 avulla, että yleisen alkuarvoehdon $y(x_0) = y_0$ toteuttava yhtälön (1) ratkaisu on

$$y(x) = x \left(\ln \left(\frac{\ln x}{\ln x_0} \right) + \frac{y_0}{x_0} \right).$$

Pisteiden x ja x_0 tulee luonnollisesti kuulua samalle määrittelyvälille.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + 2xy = 4e^{-x^2}$$

käyttämällä vakion variointia.

6. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' + 2y = x - 3; \quad y(1) = 2,$$

käyttämällä sopivaa yritettä.

7. Tutki Bernoullin differentiaaliyhtälöä $y' + \frac{2}{3}xy = xy^4$.

- a) Määrä kaikki vakioratkaisut sijoittamalla yhtälöön $y(x) = c$.

- b) Etsi yhtälön muut ratkaisut sijoituksella $z = y^{-3}$.
 - c) Millä integroimisvakion arvoilla yhtälön ei-vakiot ratkaisut ovat määritettyjä koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$?
8. Tutki Riccatin differentiaaliyhtälöä $y' = -2 - y + y^2$.
- a) Osoita, että yhtälön ainoat vakioratkaisut ovat $y(x) = 2$ ja $y(x) = -1$.
 - b) Etsi yhtälön muut ratkaisut sijoituksella $y(x) = 2 + \frac{1}{u(x)}$.
 - c) Millä integroimisvakion arvoilla yhtälön ei-vakiot ratkaisut ovat määritettyjä koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$?