
Differentiaaliyhtälöt

Syksy 2007

Harjoitus 5

1. Riccatin yhtälö voidaan ratkaista sijoituksella $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u(x)}$, missä y_0 on ko. Riccatin yhtälön eräs (esim. arvaamalla löydetty) ratkaisu.

Valitsemalla $y_0(x) = 2$ saadaan Harjoitusten 4 tehtävän 8 Riccatin yhtälölle ratkaisuparvi $y(x) = 2 + (Ce^{-3x} - \frac{1}{3})^{-1}$. Valitsemalla puolestaan $y_0(x) = -1$ saataisiin ratkaisuparvi $y(x) = -1 + (De^{3x} + \frac{1}{3})^{-1}$. Osoita, että nämä kaksi eri sijoituksella saatua ratkaisuparvea ovat samat.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$x^2y' + 2xy = y^3; \quad y(1) = 1.$$

3. Ratkaise Riccatin yhtälö

$$y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$$

kun tiedetään, että $y_0(x) = x$ on eräs ratkaisu.

4. Ratkaise separoituva yhtälö

$$x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2.$$

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'(t) = \frac{t}{y(t) - t^2y(t)}; \quad y(0) = 4.$$

Missä joukossa ratkaisu on määritelty?

6. Ratkaise yhtälö

$$y' = k(1 - y)^2, \quad k = \text{vakio}.$$

Miten vakion k arvo vaikuttaa ratkaisujen kulkuun?

7. Ratkaise yhtälö

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

8. Ratkaise yhtälö

$$x(x + y)y' + y(3x + y) = 0.$$