
Differentiaaliyhtälöt
Syksy 2007
Harjoitus 7

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 2y \end{cases} ; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$xy'' - 2y' = 0$$

muuntamalla yhtälön ensin ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi.

3. Ratkaise nk. Liouvillen differentiaaliyhtälö

$$y'' + (y')^2 = 0$$

sijoituksella $g = y'$ ja separoimalla muuttujat. Vertaa samaasi ratkaisua MAPLE[®]:n antamaan ratkaisuun

$$y(x) = \ln(c_1x + c_2).$$

4. Mihin luokkiin $\mathcal{C}^n([-1, 1])$ kuuluu funktio

$$f(x) := \begin{cases} x^4, & \text{kun } x < 0, \\ x^3, & \text{kun } x \geq 0? \end{cases}$$

Entä mihin luokkiin $\mathcal{C}^n([0, 1])$?

5. Esimerkkiä 3.2.3 mukaillen osoita, että funktiot $\sin x$, $\sin 2x$ ja $\sin 3x$ ovat lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{R}$.

6. Tutki Wronskin determinantin avulla, onko funktiojoukko

$$\left\{ x \sin \frac{1}{x}, x^2 \sin x \right\}$$

vapaa vai sidottu joukossa $\mathbb{R}_+$.

7. Ovatko funktiot $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = (x+1)e^x$ differentiaaliyhtälön

$$y'' - 2y' + y = 0$$

lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja?