

1. Oletetaan, että y_1 on yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ ratkaisu, ja että y_2 on yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ ratkaisu. Osoita, että funktio $y = y_1 + y_2$ on yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) + g(x)$ ratkaisu.

2. Etsi funktiot $p, q \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ siten, että $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ on differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

perusjärjestelmä.

3. Voivatko funktiot $y_1(x) = \sin 2x$ ja $y_2(x) = \cos 3x$ muodostaa differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad p, q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),$$

perusjärjestelmän joukossa $\mathbb{R}$?

4. Funktio $y_1(x) = x$ on differentiaaliyhtälön

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0, \quad x > 0,$$

eräs ratkaisu. Etsi yleinen ratkaisu Luvun 3.5 menetelmin.

5. Funktio $y_1(x) = x$ on differentiaaliyhtälön

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

eräs ratkaisu. Etsi yleinen ratkaisu Luvun 3.5 menetelmin.

Kertaustehtäviä:

6. Ratkaise yhtälöt

$$y' - y = 2$$

ja

$$xy' + y = 2x.$$

7. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' + y = (x + 1)^2, \quad y(0) = 0.$$

8. Ratkaise

$$y' + y = 2 \sin x.$$