

Lukuteoria

Harjoitus 1/2007

Huom! Määritelmän mukaan p on alkuluku, jos $p > 1$ ja luvun p ainoat tekijät ovat ± 1 ja $\pm p$.

1. Todista kokonaislukujen jakoyhtälön (Lause 1.1.2) yksikäsitteisyysväite.
2. Cantor esitti seuraavan idean lukujärjestelmämerkinnälle: Olkoon $N \in \mathbf{N}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset luvut $m \in \mathbf{Z}_+$ ja $a_i \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$N = a_m m! + a_{m-1}(m-1)! + \dots + a_2 2! + a_1 1!,$$

missä $0 \leq a_i \leq i$ kaikilla $i = 0, 1, \dots, m$ ja $a_m \neq 0$. Osoita, että Cantorin esitys on yksikäsitteinen pitäen tunnettuna, että esitys on olemassa.

3. Muunna luku 1999 8-järjestelmään ja luku 1777₈ kymmenjärjestelmään.
4. Esitä
 - (a) 1010111100₂ heksadesimaalijärjestelmässä,
 - (b) 7134₈ binäärijärjestelmässä.

5. Todista seuraavat Lemman 2.1.1 väitteet:

- (i) Jos $a \mid b$ ja $c \mid d$, niin $ac \mid bd$.
- (ii) Jos $a \mid b_i$ kaikilla $i = 1, \dots, n$, niin

$$a \mid b_1 c_1 + \dots + b_n c_n$$

kaikille $c_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, \dots, n$.

6. Osoita, että $n(n+1)(n+2)$ on jaollinen luvulla 3 kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.
7. Osoita kokonaislukujen jakoyhtälön avulla, että jokainen alkuluku $p > 2$ on joko muotoa $6k+1$ tai muotoa $6k-1$ jollekin $k \in \mathbf{Z}_+$.
8. Todista seuraava suurimman yhteisen tekijän karakterisaatio: Olkoot $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ siten, että $a_{i_0} \neq 0$ jollekin $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin $d = \text{syt}(a_1, \dots, a_n)$ jos ja vain jos $d \in \mathbf{N}$ toteuttaa ehdot (i) ja (ii):

- (i) $d \mid a_i$ kaikilla $i = 1, \dots, n$;
- (ii) Jos $c \in \mathbf{N}$ ja $c \mid a_i$ kaikilla $i = 1, \dots, n$, niin $c \mid d$.

[Vihje! Lause 2.1.3.]