

Lukuteoria
Harjoitus 2/2007

1. Osoita, että $\text{syt}(a+b, a-b) \geq \text{syt}(a, b)$ kaikilla $a, b \in \mathbf{N}$. Anna esimerkki tapauksesta, jossa esiintyy aito epäyhtälö.
2. Olkoon $\text{syt}(a, n) = \text{syt}(b, n) = 1$. Osoita, että $\text{syt}(ab, n) = 1$.
3. Olkoon $a \mid c$ ja $b \mid c$ siten, että $\text{syt}(a, b) = 1$. Osoita, että $ab \mid c$.
4. Osoita, että $n(n+1)(n+2)$ on jaollinen luvulla 6 kaikilla $n \in \mathbf{N}$.
5. Osoita, että Fibonaccin luvuille pätee

$$f_n > \alpha^{n-2}$$

kaikilla $n \geq 3$.

6. Määrittää $\text{syt}(f_{n+1}, f_{n+2})$ Fibonaccin luvuille, kun $n > 1$. Kuinka monta jakoyhtälöä Euklideen algoritmi vaatii?
7. Osoita: Jos p on alkuluku ja $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{N}$ siten, että $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, niin $p \mid a_i$ jollakin $i = 1, \dots, n$.
8. Oletetaan, että $a^n - 1$ on alkuluku, missä $a > 1$ ja $n > 1$. Osoita, että $a = 2$ ja n on alkuluku. [Vihje! Osoita ensin: Jos $n = kl$, missä $k, l \in \mathbf{N}$, niin

$$a^{kl} - 1 = (a^k - 1)(a^{k(l-1)} + a^{k(l-2)} + \cdots + a^k + 1).]$$