

Lukuteoria
Harjoitus 4/2007

1. Olkoon p alkuluku. Osoita, että $x^2 \equiv x \pmod{p}$ jos ja vain jos $x \equiv 0 \pmod{p}$ tai $x \equiv 1 \pmod{p}$.

2. Oletetaan, että luku $n \in \mathbf{N}$ toteuttaa kongruenssin

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$$

Osoita, että n on alkuluku. [Vihje! Antiteesi johtaa ristiriitaan esimerkiksi jakoyhtälön kanssa.]

3. Olkoot $m, k \in \mathbf{N}$ ja $a \in \mathbf{Z}$ siten, että $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. Osoita, että $\text{sy}(a, m) = 1$.
4. Osoita, että kaikilla $m \in \mathbf{N}$ kongruenssiluokat $[0], [1], \dots, [m-1]$ modulo m ovat pareittain pistevieraita.
5. Olkoon $m \in \mathbf{N}$. Määritelmän mukaan m :n luvun joukko $\{r_1, \dots, r_m\}$ on *täydellinen jäännössystemi modulo m* , jos $r_i \not\equiv r_j \pmod{m}$ aina kun $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$. Osoita: Jos $\{r_1, \dots, r_m\}$ on täydellinen jäännössystemi modulo m ja $a, b \in \mathbf{Z}$ siten, että $\text{sy}(a, m) = 1$, niin myös joukko

$$A = \{ar_i + b \mid i = 1, \dots, m\}$$

on täydellinen jäännössystemi modulo m .

6. Etsin jokin ratkaisu Diofantoksen yhtälölle $178x + 46y = 100$.
7. Ratkaise kongruenssi $97x \equiv 13 \pmod{162}$ kirjoittamalla Euklideen algoritmin avulla tarvittava lineaarikombinaatio.
8. Ratkaise muinainen kiinalainen satapäisen siipikarjan ongelma: Kukko maksaa 5 rahaa, kana 3 rahaa ja kolme kananpoikaa saa yhdellä rahalla. Millä tavoin kukot, kanat ja kananpojat voidaan valita, kun sadalla rahalla halutaan satapäinen siipikarja? [Vihje! Muodosta ehdot yhdistämällä kahden muuttujan Diofantoksen yhtälö.]