

Lukuteoria
Harjoitus 6/2007

1. Määrittää Fermat'n pienen lauseen avulla luvun 3^{1000} jakojäännökset modulo 7 ja modulo 11.
2. Osoita Fermat'n pienen lauseen avulla, että luku 91 on 3-kantainen pseudoalkuluku.
3. Olkoon $\text{sy}(b, n) = 1$ ja olkoon n b -kantainen pseudoalkuluku. Osoita, että n on myös $\bar{b}$ -kantainen pseudoalkuluku, kun $\bar{b}$ on luvun b käänteisluku modulo n .

4. Olkoon

$$n = (6m + 1)(12m + 1)(18m + 1),$$

missä $m \in \mathbf{N}$ on valittu siten, että jokainen luvuista $6m + 1$, $12m + 1$ ja $18m + 1$ on alkuluku. Osoita Lauseen 3.5.8 avulla, että n on Carmichaelin luku. Mitkä ovat kaksi pienintä tällaista Carmichaelin lukua?

5. Olkoon n muotoa

$$n = p_1 \cdots p_r,$$

missä p_i :t ovat erillisiä alkulukuja ja $(p_i - 1) \mid (n - 1)$ kaikilla $i = 1, \dots, r$. Osoita, että n on Carmichaelin luku.

6. Osoita, että b -kantainen vahva pseudoalkuluku n on välttämättä b -kantainen pseudoalkuluku, kun $b > 1$.
7. Osoita: Jos n on pariton 2-kantainen pseudoalkuluku, niin $N := 2^n - 1$ on 2-kantainen vahva pseudoalkuluku. [Vihje! Osoita ensin, että $2^{n-1} - 1 = nk$, missä k on pariton, ja että tämän seurauksena $N - 1 = 2nk$.]
8. Olkoon $n > 1$. Osoita, että n on alkuluku jos ja vain jos $\phi(n) = n - 1$.