

Lukuteoria
Harjoitus 7/2007

1. Olkoon $\{a_1, \dots, a_{\phi(n)}\}$ r.j.s. modulo n ja olkoon $b \in \mathbf{Z}$ siten, että $\text{syte}(b, n) = 1$. Osoita, että joukko

$$A := \{ba_i \mid i = 1, \dots, \phi(n)\}$$

on r.j.s. modulo n .

2. Olkoon $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ täydellinen jäännössystemi modulo n . Perustele, miksi joukossa A on täsmälleen $\phi(n)$ alkia, jotka ovat suhteellisia alkulukuja luvun n kanssa.

3. Olkoon $\text{syte}(a, m) = 1$. Ratkaise lineaarinen kongruenssi

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

Eulerin lauseen avulla.

4. Olkoot $a, b \in \mathbf{N}$ suhteellisia alkulukuja keskenään. Osoita Eulerin lauseen avulla, että

$$a^{\phi(b)} + b^{\phi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}.$$

5. Osoita, että

$$\phi(m^k) = m^{k-1}\phi(m)$$

kaikille $m, k \in \mathbf{N}$. [Vihje! Lause 4.1.14.]

6. Selvitä, mitkä luvut $n \in \mathbf{N}$ toteuttavat yhtälön

$$\phi(3n) = 3\phi(n).$$

7. Todista yhtälö $F(p^a) = p^a$ aritmeettiselle funktiolle

$$F(n) := \sum_{d \in \mathbf{N}, d|n} \phi(d)$$

missä p on alkuluku ja $a \in \mathbf{N}$.

8. *Möbius-funktio* $\mu : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ määritellään asettamalla

(1) $\mu(1) = 1$,

(2) $\mu(n) = 0$ jos $p^2 \mid n$ jollekin alkuluvulle p ,

(3) $\mu(n) = (-1)^s$ jos $n = p_1 \cdots p_s$, missä p_i :t ovat erillisiä alkulukuja.

Osoita, että μ on multiplikaatiivinen.