

Geometria

Harjoitus 1/2008

1. Olkoot $f, g, h \in \mathbf{R}$. Osoita, että niiden pisteiden $P = (x, y)$ joukko, joille

$$x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0, \quad (1)$$

on ympyrä keskipisteenä $(-\frac{1}{2}f, -\frac{1}{2}g)$ ja säteenä \sqrt{d} mikäli $d := \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 - h > 0$. Määää edelleen yhtälön ratkaisujoukko tapauksissa $d = 0$ ja $d < 0$.

2. Tarkastellaan ympyröitä

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 + 2x - 8y + 5 = 0.$$

- (i) Määää keskipisteiden välinen etäisyys.
(ii) Tutki, ovatko ympyrät ortogonaaliset.
3. Olkoot P, Q ja R kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Osoita, että on olemassa täsmälleen yksi ympyrä pisteiden P, Q ja R kautta. (Vihje! Siirtoa käyttämällä voidaan olettaa, että yksi pisteistä on origo.)

4. Määää ympyröiden

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$$

leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö.

5. Tarkastellaan parabelia $y^2 = x$, jonka parametriesitys on $x = t^2, y = t$, kun $t \in \mathbf{R}$.

- (i) Määää parabelin polttopiste ja johtosuora.
(ii) Määää parametrinarvoihin t_1 ja t_2 liittyvä ehto sille, että polttopiste sijaitsee pisteiden $P = (t_1^2, t_1)$ ja $Q = (t_2^2, t_2)$ määräämällä suoralla.

6. Määää sen ellipsin yhtälö, jonka polttopiste on $(0, 0)$, johtosuora on $y = x - 6$ ja eksentrisyys on $\frac{1}{2}$. (Vihje! Pisteiden etäisyys suorasta pidetään tunnettuna.)