

Geometria

Harjoitus 2/2008

1. Hyperbelin standardimuoto saadaan, kun valitaan polttopisteeksi $(ae, 0)$ ja johtosuoraksi $x = \frac{a}{e}$, missä $a > 0$ ja $e > 1$. Osoita, että standardimuodon implisiittiesitys on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $b := a\sqrt{e^2 - 1}$.

2. Tarkastellaan suorakulmaista hyperbeliä $xy = 1$. Olkoot P ja Q kaksi hyperbelin pistettä ensimmäisessä neljänneksessä. Olkoon N jängteen PQ ja x -akselin leikkauspiste sekä olkoon M jängteen keskipiste. Osoita, että pisteiden M ja N etäisyys on sama kuin pisteen M etäisyys origosta. (Vihje! Hyödynnä parametriesitystä $x = t, y = \frac{1}{t}$.)

3. Tarkastellaan hyperbeliä $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, jonka polttopisteet ovat $F = (ae, 0)$ ja $F' = (-ae, 0)$. Osoita, että itseisarvo $||PF| - |PF' ||$ on riippumaton hyperbelin pisteen P valinnasta.

4. Osoita, että standardimuotoisen parabelin pisteeseen $P = (at^2, 2at)$ liittyvän tangentin yhtälö on muotoa

$$ty = x + at^2.$$

5. Tarkastellaan hyperbeliä, jonka parametriesitys on $x = \frac{1}{\cos t}, y = 3 \tan t$. Olkoon T pisteeseen P piirretyn hyperbelin tangentin ja x -akselin leikkauspiste. Ilmaise pisteen T x -koordinaatti parametrin t funktiona.

6. Tarkastellaan ellipsiä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

missä $a > b > 0, b^2 = a^2(1 - e^2)$ ja $0 < e < 1$.

- (i) Määrää pisteeseen $P = (a \cos t, b \sin t)$ piirretyn ellipsin normaalin yhtälö sekä normaalin ja x -akselin leikkauspiste Q , kun $t \notin \{0, \pi\}$.
- (ii) Olkoon $F = (ae, 0)$. Osoita, että $|QF| = e|PF|$.