Geometria
Harjoitus 3/2008

1. Olkoon F_θ tason kierto origon suhteen vastapäivään kulman $\theta \in [0, 2\pi[$ verran. Osoita, että F_θ on isometria.

2. Olkoon F_l peilaus suoran l suhteen, ts.

$$F_l(X) = X - 2\langle X - P, N\rangle N,$$

missä $P \in l$ ja N on suoran l normaalin yksikkösuuntavektori. Osoita, että F_l on isometria. (Vihje! Kirjoita lauseke $|F_l(X) - F_l(Y)|^2$ sisätuloa käyttäen.)

3. Osoita, että isometriat $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ muodostavat ryhmän kuvausten yhdistämisoperaation suhteen.

4. Olkoon $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ isometria, jolle $F(0) = 0$. Osoita, että

$$\langle F(X), F(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

kaikille $X, Y \in \mathbf{R}^2$.

5. Todista kolmioepäyhtälö $|X + Y| \leq |X| + |Y|$ ja osoita, että yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $X = cY$ jollekin $c > 0$. (Vihje! Arvioi neliötä $|X + Y|^2$ Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä käyttäen.)

6. Olkoon l origon kautta kulkeva suora, jonka yksikkösuuntavektori on $V = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ jollekin $\alpha \in [0, 2\pi[$. Osoita, että peilauksella F_l suoran l suhteen on esitys

$$F_l(X) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

kun $X = (x_1, x_2)$.

7. Olkoot l_1 ja l_2 origon kautta kulkevia suoria, joiden yksikkösuuntavektorit ovat

$$V_1 = (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1) \quad \text{ja} \quad V_2 = (\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$$

joillekin $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$. Osoita, että yhdistetty kuvaus $F_{l_1} \circ F_{l_2}$ on kierto

$$(F_{l_1} \circ F_{l_2})(X) = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2) & -\sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) & \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

kun $X = (x_1, x_2)$.