

Geometria
Harjoitus 5/2008

1. Olkoon A kääntyvä 2×2 -reaalilukumatriisi ja $B \in \mathbf{R}^2$. Osoita, että affiini kuvaus $F(X) = AX + B$ on bijektio, jonka käänteiskuvaus on affiini kuvaus

$$G(X) = A^{-1}X - A^{-1}B.$$

2. Määää suoran $2y = 3x - 1$ kuva affiinissa kuvauksessa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. Muodosta sellainen affiini kuvaus, joka kuvaa pisteet $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ pisteiksi $(0, -1)$, $(1, 1)$ ja $(-1, 1)$ (vastaavassa järjestyksessä).
4. Muodosta sellainen affiini kuvaus, joka kuvaa pisteet $(1, 1)$, $(3, 2)$ ja $(4, 1)$ pisteiksi $(0, 1)$, $(1, 2)$ ja $(3, 7)$ (vastaavassa järjestyksessä).
5. Osoita, että affiini kuvaus kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi. (Vihje! Käytä Lausetta 2.2.5.)
6. Määää standardimuotoisen hyperbelin

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kuva affiinissa kuvauksessa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b^{-1} \\ a^{-1} & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$